Egyenletek megoldása függvények segítségével

EPSZTI
Regionális matematika tanári szakmai nap
Szeged, 2018. 09. 24.

Dr. Németh József
címzetes egyetemi tanár
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis tanszék

MOTTÓ:
... nem igaz, hogy az esméret' gyönyörűségének tsak a' haszon vólna a' rugója. Gyönyörködik a' Kertész számtalan plántáibann és virágaibann, mellyeknek semmi hasznát nem tudja; gyönyörködik a mezei ember, ha az Égre tekintvénn egynéhány Tsillagokat névenn nevezhet; gyönyörködik a' tanúlt ember a' Tudománybann a' mellybenn jártas; bár annak orvosi és gazdasági hasznáról nem számolhat is. Maga az esméret-terjedése és szélesedése az ember okos lelkébenn a' legtisztább és nemesebb gyönyörűség-érzésnek kútfeje. A' ki abból magából is gyönyörűséget érezni nem tud: tegye férle a' Természet vizsgálását; sőt a' Tudománynak minden névvel nevezendő nemét tegye félre; nem néki való....
(Fazekas Mihály és Diószegi Sámuel: Magyar Fűvész könyv, 1807).

"**Egyenletek, amelyek nem oldhatók meg.**"

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt[8]{1-x^2} + \sqrt[4]{x^4-1} = 3^x - \frac{3}{(2+x^6)} - 2.$$

Megoldás.

Vizsgáljuk az **ÉT.**-t:

$$\left.\begin{array}{lcl} 1-x^2 \geq 0 & \iff & |x| \leq 1 \\ x^4-1 \geq 0 & & |x| \geq 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1. \end{array}$$

Vizsgáljuk ezt két értéket:

$$x_1 = 1 : 0 \stackrel{?}{=} 3 - \frac{3}{3} - 2 = 0$$

$$x_2 = -1 : 0 \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} - \frac{3}{3} - 2 = -\frac{8}{3}.$$

Tehát $x = 1$ a megoldás.

2. Oldjuk meg: $\sin\dfrac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5.$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \sin\frac{\pi x}{4},$$
$$g(x) = x^2 - 4x = 5 = (x-2)^2 + 1.$$

Mivel $R_f = [-1;1]$, $R_g[1;\infty)$. Így $R_f \cap R_g = \{1\}$, azaz

1)

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$\Longleftrightarrow \pi x = 2\pi + 8\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow x = 2+8k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

2)

$$x^2-4x+5=1 \Longleftrightarrow x=2.$$

$\Longrightarrow$ **Megoldás.** $x=2$.

Megjegyzés. Itt az értékkészlet vizsgálata volt hasznos.

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

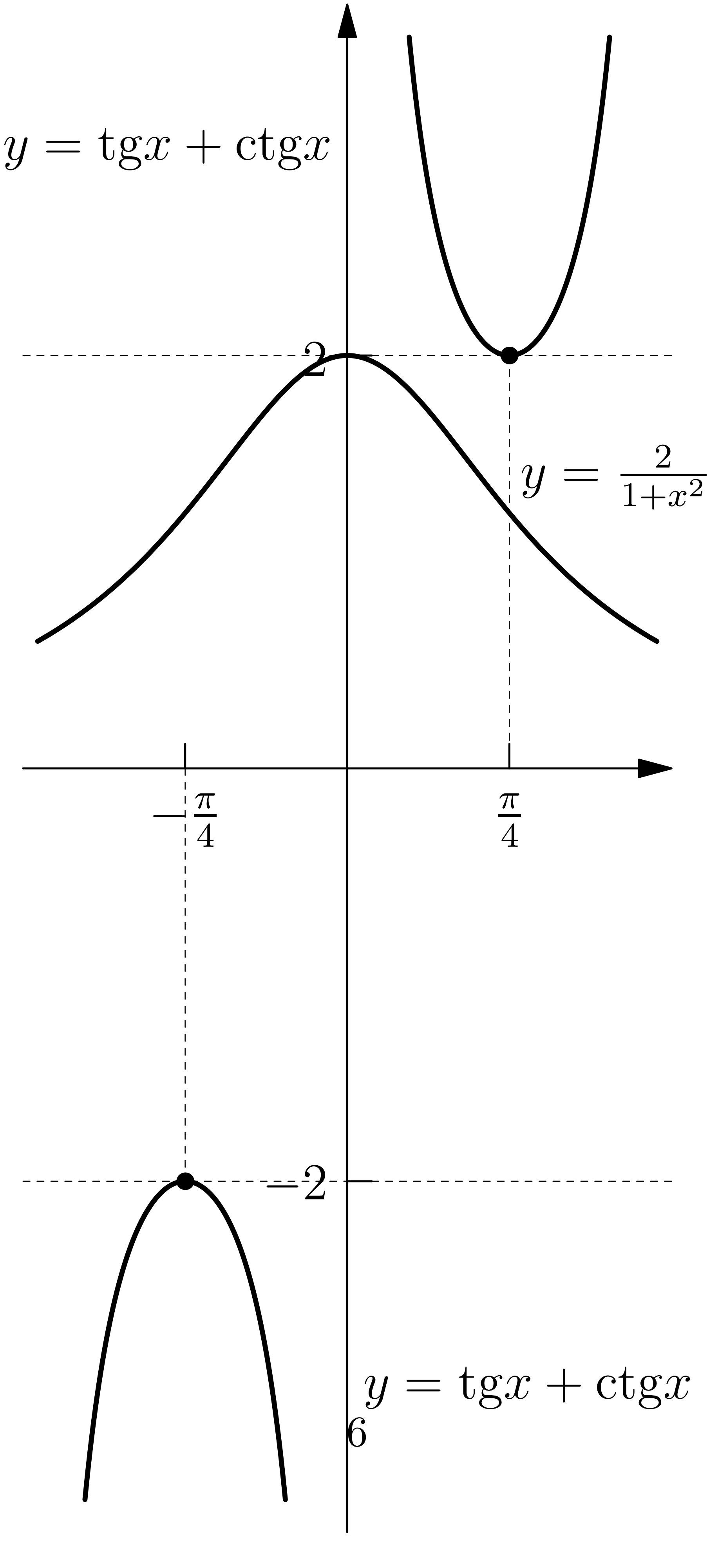
$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{2}{1+x^2}.$$

Megoldás.

Vizsgáljuk az ÉK.-et! Ha $g(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, akkor $\text{ÉK}_g=(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$. (Itt felhasználtuk, hogy $a+\frac{1}{a}\geq 2$, ha $a>0$ és $a+\frac{1}{a}\leq -2$, ha $a<0$.)

Ha $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$, akkor $\text{ÉK}_f=(0;2]$.

A bal és jobb oldalon levő függvények értékkészleteinek közös értéke csak a 2, amit $g(x)$ az $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, az $f(x)$ pedig az $x = 0$ helyen vesz fel. Így tehát látszik, hogy nincs az egyenletnek megoldása.


$y = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$
2
$y = \frac{2}{1+x^2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
-2
$y = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$

4. Oldjuk meg a
$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}=\sqrt[3]{x^2+7}-2$ egyenletet.

Megoldás. Legyen $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}$ és $g(x)=\sqrt[3]{x^2+7}-2$. Mivel $\text{ÉT}_f=[-1;1]$ és $\text{ÉT}_g=(-\infty;\infty)$, így az egyenlet értelmezési tartománya: $\text{ÉT}_e=[-1;1]$. Ha $x\in\text{ÉT}_e$, akkor $x^2\leq 1\Rightarrow\sqrt[3]{x^2+7}-2\leq 0$, tehát $g(x)\leq 0$ az ÉT_e-be eső x-ekre, viszont az $f(x)\geq 0$ minden $x\in\text{ÉT}_e$ esetén. Tehát csak akkor lehet egyenlő a két oldal, ha mindkettő 0, azaz $x=\pm1$ (a jobb oldal alapján). A két érték közül $x=-1$ esetén lesz a bal oldal 0.

A megoldás: $x=-1$.

Itt tehát az ÉT és ÉK kombinálása volt a lényeg, úgy, hogy természetesen az $f\colon[-1;1]\to\mathbb{R}$ és $g\colon[-1;1]\to\mathbb{R}$ függvényeket vettük.

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $2^x+3^x=2$;

b) $2^x+4^x=2\cdot5^x$;

c) $2^x+4^x=2\cdot5^x(x^3+1)$.

Megoldás.

a) $f(x)=2^x+3^x\uparrow\Rightarrow f(x)=2$-nek legfeljebb egy megoldása van. Könnyű látni, hogy $x=0$ megoldás.

b) Itt a bal oldalon levő és a jobb oldalon levő függvények is monoton nőnek.

Nézzük a következő átalakítást (osszunk végig 5^x-nel):

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 2.$$

Így az $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \downarrow$ tehát csak legfeljebb egy helyen veszi fel a 2 értéket. Ezt $x = 0$-nál veszi fel, tehát $x = 0$ a megoldás.

c) Alkalmazzuk itt is a leosztást:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 2(x^3 + 1).$$

Itt a bal oldal szigorúan csökken, a jobb oldal pedig $\uparrow$, így legfeljebb egy megoldás van, ami itt is könnyen adódik: $x = 0$.

6. a) Oldja meg a következő egyenletrendszert:

(1) $x - y = 2^y - 2^x$;

(2) $x^2 + y^2 = 1$.

Megoldás. (1)$\Leftrightarrow x + 2^x = 2^y + y$; mivel $f(t) = t + 2^t \uparrow$, ezért $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Tehát $x = y \overset{(2)}{\Rightarrow} 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Így a megoldás: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Megjegyzés. Itt tehát a monotonitást használtuk.

6. b) Oldjuk meg a következő egyenletet:
$(*)$
$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0.$

Megoldás. Legyen $f(t) = t(2+\sqrt{t^2+3}) \uparrow$ $[0;\infty)$-n, és $f(-t) = -f(t) \Rightarrow$ páratlan $\Rightarrow f \uparrow$ $(-\infty;\infty)$-n.

Írjuk $(*)$-ot így:

$$\underbrace{(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})}_{f(2x+1)} = -3x(2+\sqrt{9x^2+3}) =$$

$$= \underbrace{(-3x)(2+\sqrt{(-3x)^2+3})}_{f(-3x)}.$$

A szigorú monotonitás miatt: $2x+1 = -3x \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{5}$ ez az egyetlen megoldás.

7. Bizonyítsuk be, hogy az $x|x+2p| = p$ egyenletnek a p paraméter bármely értékére pontosan egy megoldása van! Más megfogalmazás?

I. Megoldás. Legyen x az egyenlet gyöke. Három esetet fogunk vizsgálni aszerint, hogy $x+2p = 0$; $x+2p > 0$ vagy $x+2p < 0$.

a) Ha $x+2p = 0$, akkor csak $p = 0$ lehet, ekkor viszont $x = 0$ az egyetlen megoldás.

b) Ha $x+2p > 0$, akkor az egyenletünk $x^2+2px-p = 0$ alakba írható; ennek gyökei $x_1 = -p+\sqrt{p^2+p}$ vagy $x_2 = -p-\sqrt{p^2+p}$, ahol $p \neq 0$.

Az $x_1+2p > 0$, ha $\sqrt{p^2+p} > -p$, vagyis ha $p > 0$. Ugyanis a négyzetgyök alatti $p^2+p = p(p+1)$ akkor pozitív, ha vagy $p > 0$ vagy $p < -1$. Ez utóbbi azonban nem lehetséges, mert ekkor $\sqrt{p^2+p} < -p$ volna. Tehát x_1 gyöke az eredeti egyenletnek, ha $p > 0$.

Az $x_2+2p > 0$, ha $-\sqrt{p^2+p} > -p$, ami egyetlen p-re sem igaz. Az x_2 tehát nem gyöke az eredeti egyenletnek.

c) Ha $x+2p < 0$, akkor az egyenletünk $x^2+2px+p = 0$ alakba írható. Ennek gyökei

$$x_3 = -p+\sqrt{p^2-p} \text{ vagy } x_4 = -p-\sqrt{p^2-p}.$$

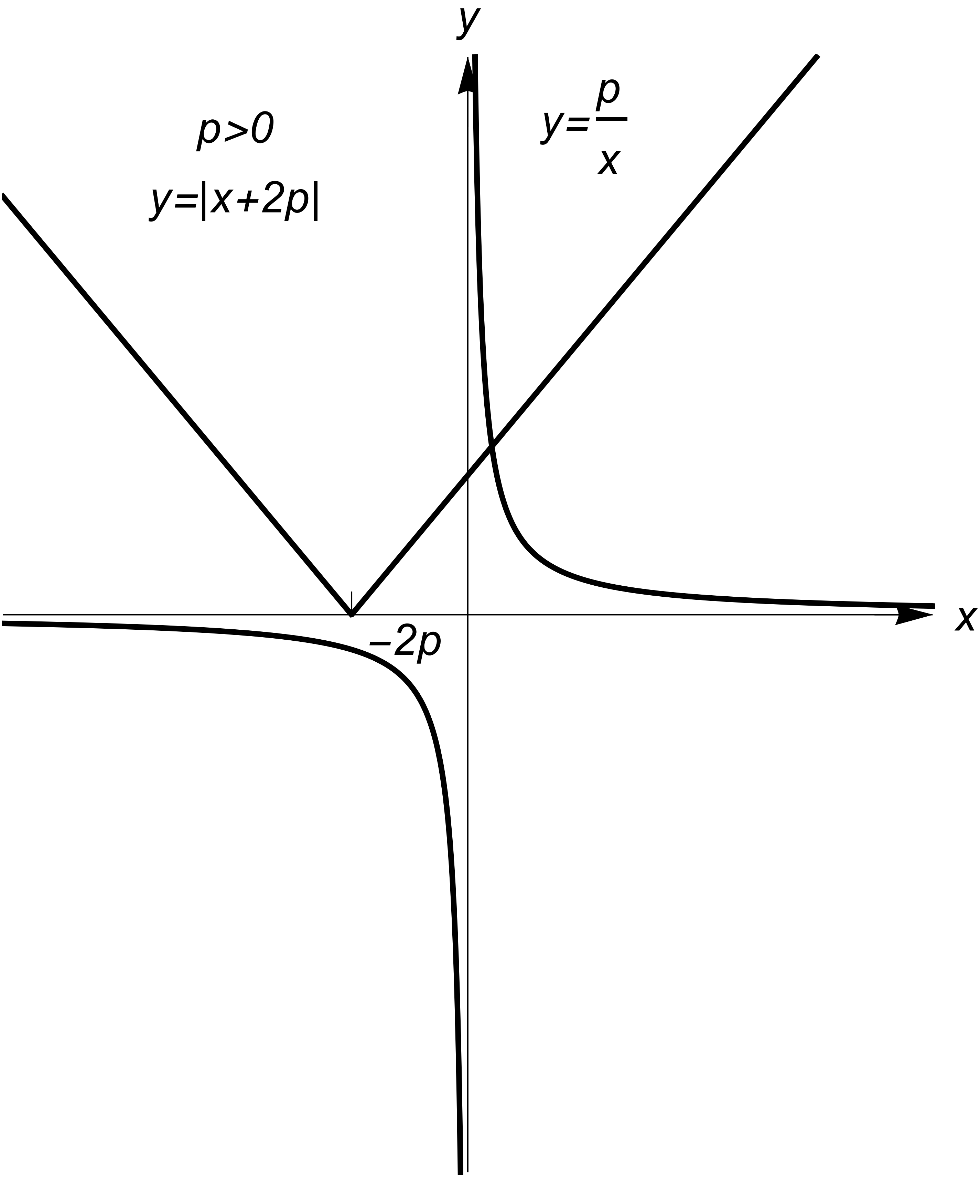
Az $x_3+2p < 0$, ha $\sqrt{p^2-p} < -p$, ami egyetlen

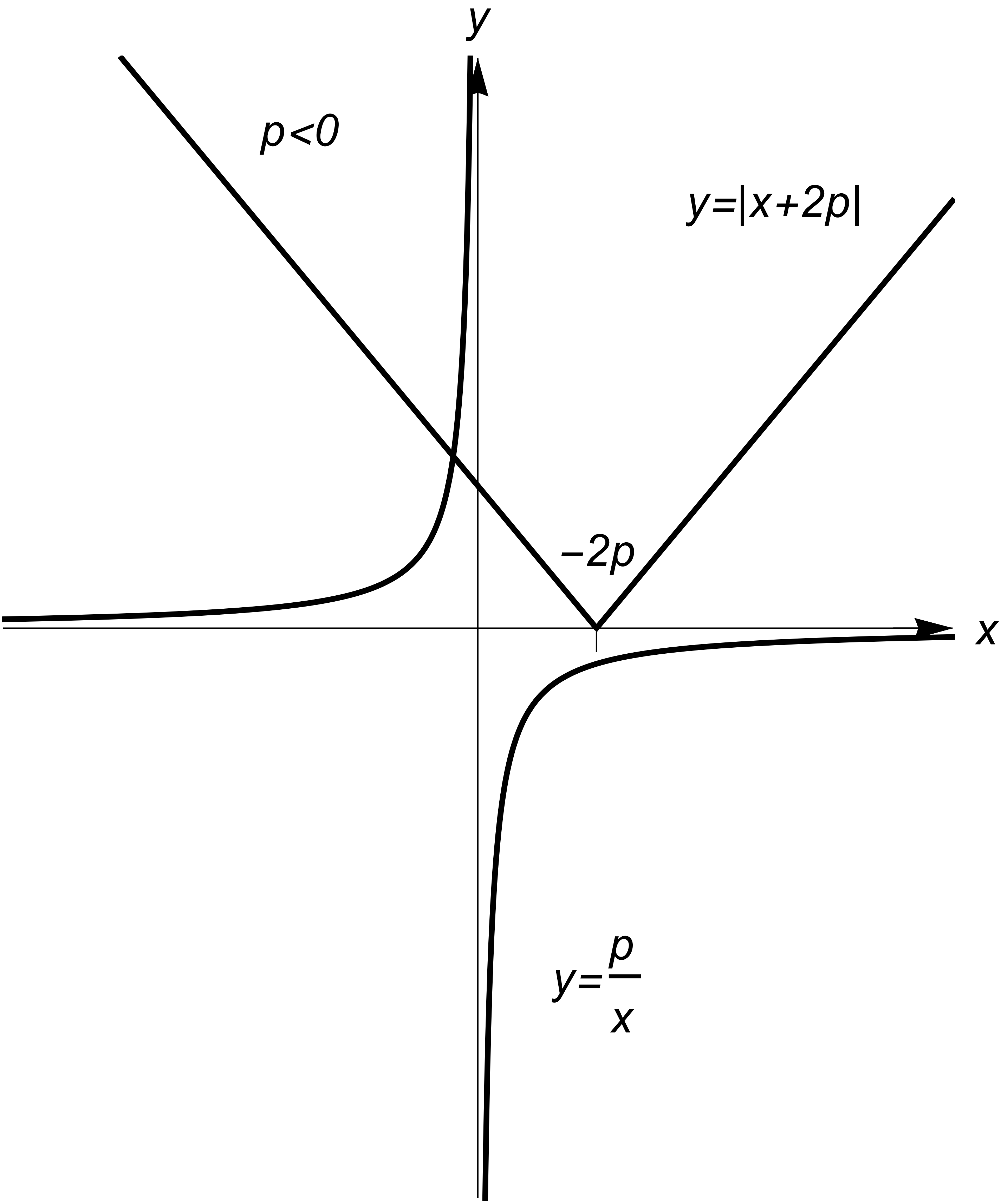
p-re sem teljesül. Az x_3 tehát nem gyöke az eredeti egyenletnek.

Az $x_4 + 2p < 0$, ha $-\sqrt{p^2 - p} < -p$, vagyis ha $p < 0$. Ekkor $p^2 - p > 0$, tehát x_4 gyöke az eredeti egyenletnek, ha $p < 0$.

Összefoglalva: $p = 0$; $p > 0$, illetve $p < 0$ esetben is egyetlen gyök van ($x = 0$; $x = x_1$, illetve $x = x_4$). (*Felvételi 1990*)

II. Megoldás. (Függvénytani)


y
p>0
y=|x+2p|
y=p/x
x
−2p

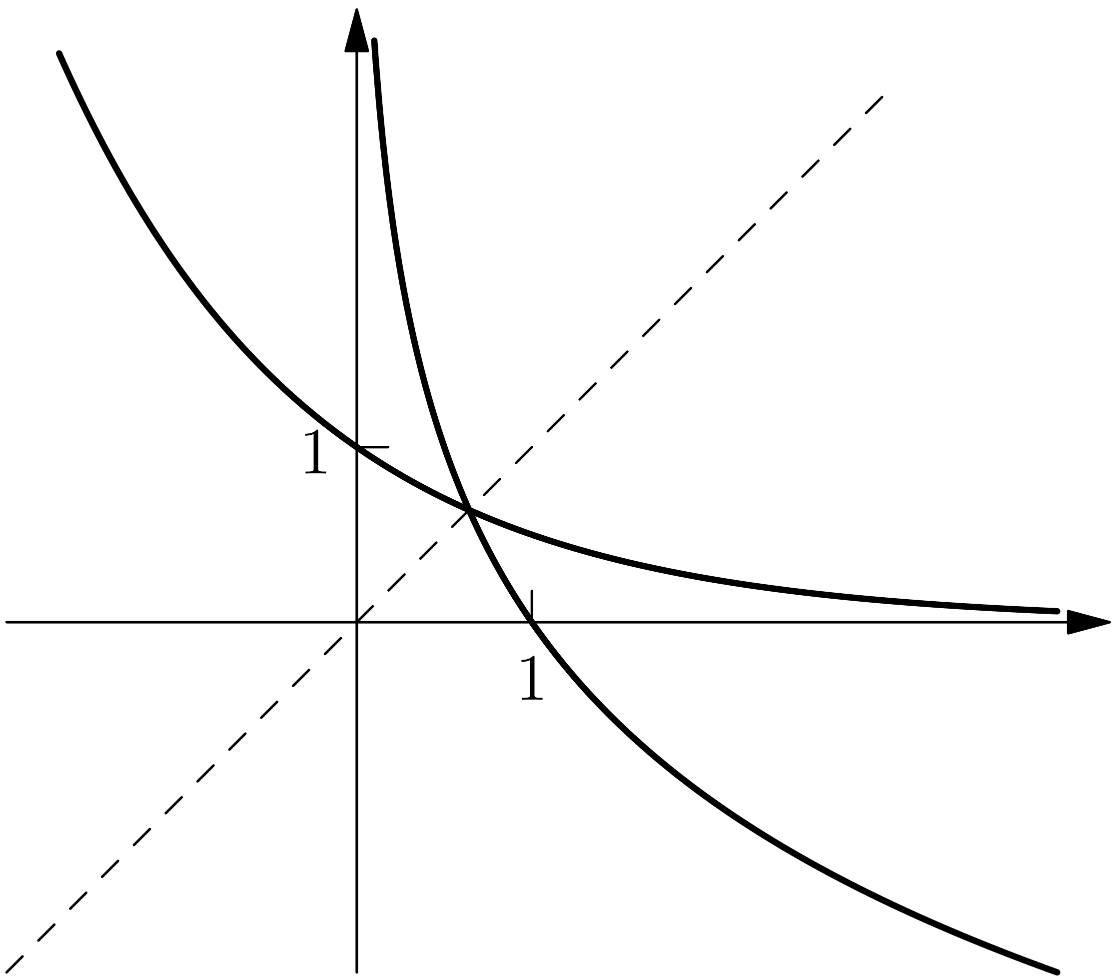

y
p<0
y=|x+2p|
−2p
x
y=p/x

8. Hány megoldása van a

$$\log_{1/16} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

egyenletnek?

Megoldás.



(**felületes!**)

„*Objection*?”

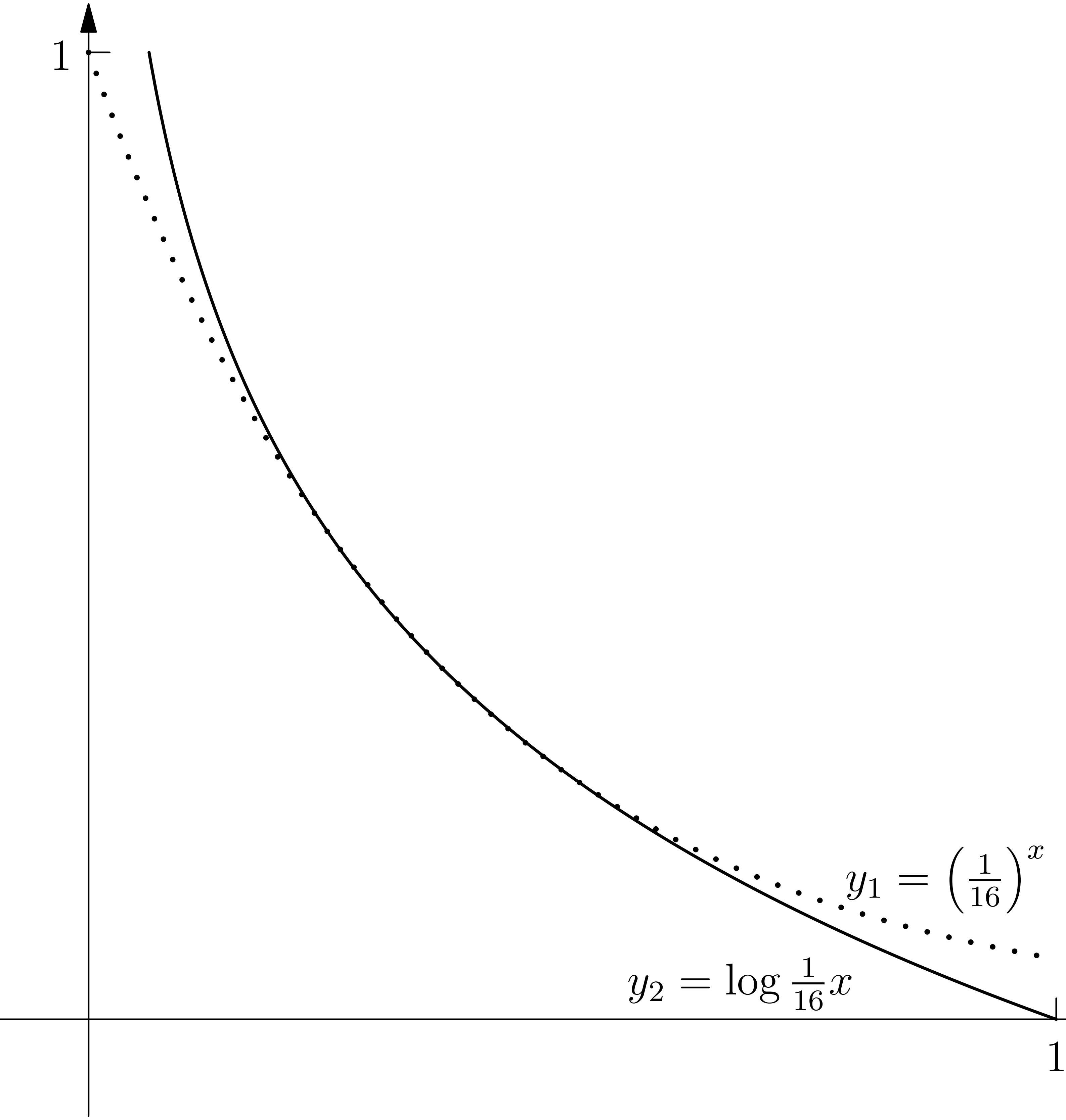
Nézzük a következőt:

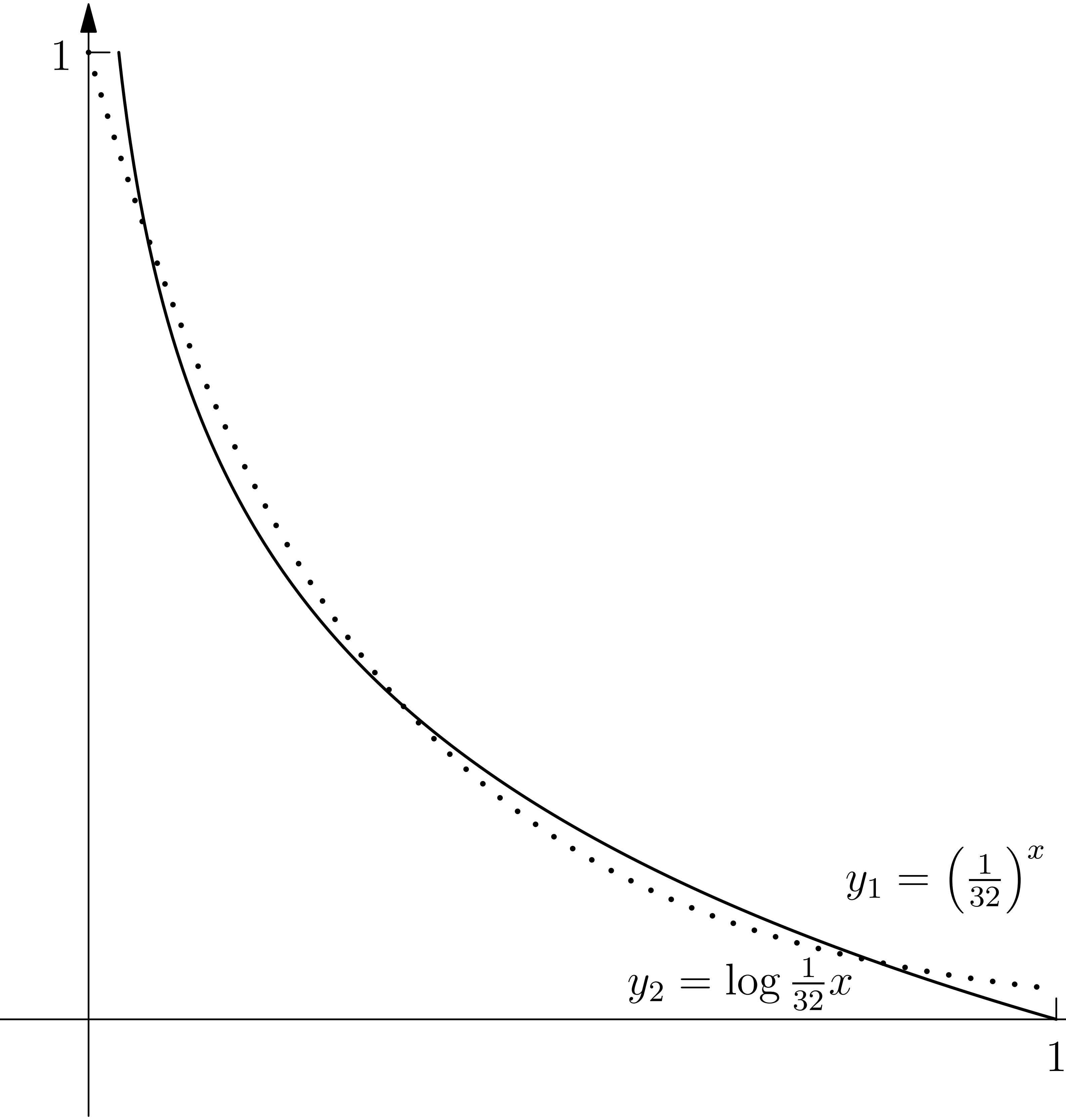
$$\left(y_1 = \left(\frac{1}{16}\right)^x;\ y_2 = \log_{1/16} x\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}
y_2 : x = \frac{1}{4}\text{-nél } \frac{1}{2},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ rajta van } y_2\text{-n} \\
y_1 : x = \frac{1}{4}\text{-nél } \frac{1}{2},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ rajta van } y_1\text{-n} \\
y_2 : x = \frac{1}{2}\text{-nél } \frac{1}{4},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ rajta van } y_2\text{-n} \\
y_1 : x = \frac{1}{2}\text{-nél } \frac{1}{4},\ \text{azaz } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ rajta van } y_1\text{-n}
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ legalább két megoldás van: $x = \frac{1}{4}; x = \frac{1}{2}$ és még egy biztos az $y = x$ egyenesen (inverz miatt).

LD. **MELLÉKLET**: Computer által készített ábrák.


1
$y_1 = \left(\frac{1}{16}\right)^x$
$y_2 = \log_{\frac{1}{16}} x$
1


1
$y_1 = \left(\frac{1}{32}\right)^x$
$y_2 = \log_{\frac{1}{32}} x$
1

TANULSÁG!

PROBLÉMA. *Milyen* $0 < a < 1$ *esetén van több megoldása az* $a^x = \log_a x$ *egyenletnek?*

Állítás: akkor és csak akkor, ha $0 < a < e^{-e} \approx 0,065988$, $\frac{1}{16} = 0,0625$.

9. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$(*) \qquad \sqrt{7 + \sqrt{7 + x}} = x.$$

Kezdjük egy négyzetreemeléssel $x \geq 0$-ra, akkor

$$7 + \sqrt{x + 7} = x^2,$$

azaz

$$(**) \qquad \sqrt{x + 7} = x^2 - 7, \ x \geq 0$$

egyenlet adódik (további négyzetreemeléssel zsákutcába jutunk). Ha $f(x)$-szel elöljüjk a $\sqrt{x+7}$ függvényt, akkor a $(*)$ egyenletre $f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = \overline{f}(x)$ adódik, azaz a $(**)$ egyenlet alakja:

$$f(x) = \overline{f}(x).$$

(Erre egyébként a $(**)$ két oldalán levő függvények grafikonjaiból is, vagy az interzvüggvény definíciójából is rájöhetünk.)

Ha f és $\overline{f}$ grafikonja *csak* az $y = x$ egyenesen metszené egymást, akkor elég lenne akár a $\sqrt{x+7} = x$, akár az $x^2 - 7 = x$ egyenletet megoldani. Bármelyiket tekintve az

$$x^2 - x - 7 = 0$$

egyenlethez jutunk, amiből

$$x = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$$

adódik.

Jogos-e itt ez a megoldási lépés (ld. 8. feladatot!)?? Igen. (Itt igen.)

Tétel: *Ha $f \uparrow$, akkor az $\overline{f}(x) = f(x)$ egyenlet ekvivalens az $f(x) = x$ egyenlettel (vagy $\overline{f}(x) = x$-szel).*

Bizonyítás. a) Legyen x_0: $f(x_0) = \overline{f}(x_0)$, kérdés $f(x_0) = x_0$.

Tegyük fel, hogy $x_0 > f(x_0)$, ekkor $\overline{f}(x_0) > x_0$, de akkor $\overline{f}(x) > f(x_0)$ (ellentmondás).

Tegyük fel, hogy $x_0 < f(x_0)$, ekkor $\overline{f}(x_0) < x_0$, de akkor $\overline{f}(x_0) < f(x_0)$ (ellentmondás).

b) Legyen x_0: $f(x_0) = x_0$, kérdés $\overline{f}(x_0) = f(x_0)$.

Mivel $f(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = \overline{f}(x_0) \Rightarrow f(x_0) = \overline{f}(x_0)$.

Nagyon fontos a $\uparrow$.
(ld. Ábrahám G., Katz S.)

10. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$$

Megoldás.
Próbálkozás:

$$2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2-\sqrt{2+x}=(x^2-2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2+x=(2-(x^2-2)^2)^2.$$
$$\vdots$$

Trükk: $\cos\varphi$; $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$, $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$.
Mivel $x \geq 0$ és $2-\sqrt{2+x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{2+x} \Leftrightarrow$

$$4 \geq 2+x \Leftrightarrow 2 \geq x; \text{ tehát } 0 \leq x \leq 2.$$

De $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2\cos\varphi \leq 2$.

Tehát: $x = 2\cos\varphi$ vehető; ilyen alakban keresem a megoldást.

Így

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2+2\cos\varphi} = \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 2\cos\frac{\varphi}{2}.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{4}} = 2\sin\frac{\varphi}{4}.$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = \sqrt{2+2\sin\frac{\varphi}{4}} =$$
$$= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{4}\right)} =$$
$$= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right)} =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right).$$

Így

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right) = 2\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}\right)=\cos\varphi$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{8}=\varphi(!)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{9}{8}\varphi \Leftrightarrow \varphi-\frac{8\pi}{36}=\frac{2\pi}{9}=40^\circ$$

Tehát a megoldás: $x=2\cos 40^\circ \approx 1,532088886\ldots$.

11. Oldjuk meg $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Először oldjuk meg a

$(*)\qquad \cos(\sin x)=\sin(\cos x)$ egyenletet.

$$(*)\Longleftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\sin\cos x$$

a)

$$\frac{\pi}{2}-\sin x=\cos x+2k\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin x+\cos x=\frac{\pi}{2}-2k\pi$$

b)

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \cos x + 2k\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin x - \cos x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Mivel $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ és $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$, így a) és b) soha sem áll fenn, tehát $(*)$-nak nincs megoldása.

Tekintsük az $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ függvényt. Nyilván $f(x) > 0$-t kell megoldani. De $f(0) = 1 - \sin 1 > 0$ és $f(x) \neq 0$ mindenütt, így $f(x) < 0$ nem lehet (ld. a folytonos függvény Bolzano–Darboux tulajdonsága)$\Longrightarrow f(x) > 0 \; \forall \, x$-re, azaz az eredeti egyenlőtlenség minden x-re teljesül.

12. Oldjuk meg:

$$x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = 0.$$

Megoldás. $x_0 = 1$ megoldás.

Ekkor $x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = (x-1)(x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 41) = 0$.

Kérdés: Van-e több megoldás?

Elég megoldani.

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 41 = 0?? \text{ nehéz!}$$

Térjünk vissza az eredetihez. Legyen $f(x) = x^5 - 10x^3 + 50x - 41$.

Tegyük fel, hogy $\exists(x_1 \neq x_0 = 1)$.

Ekkor a Rolle-tétel szerint:

$$f'(x) = \underbrace{5x^4 - 30x^2 + 50}_{(*)} = 0\text{-nak kell,}$$

hogy legyen megoldása.

De $(*)$-nak a diszkriminánsa $< 0 \Longrightarrow$ nincs valós megoldás. Ez ellentmondás, tehát nincs másik megoldás.

13. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} y = (x - y)^2 \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Megoldás. (1) fennáll, ha $x = y$ és $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ekkor (2) $\Longrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, illetve $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Kérdés. Van-e több megoldás?

Van-e olyan megoldás, ahol $x \neq y$?

Vehető $x > y$ (szimmetria miatt)

Tegyük fel, hogy $\exists\, x > y$ megoldás.

$$(1) \Longrightarrow \underbrace{2 \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y}}_{(*)} = \underbrace{x - y}_{(**)} \quad (3)$$

$$(*) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 c} \left[-\frac{\pi}{2} < -1 \leq y < c < x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \right]$$

Lagrange-féle középérték-tételből.

$(**) < 2$.

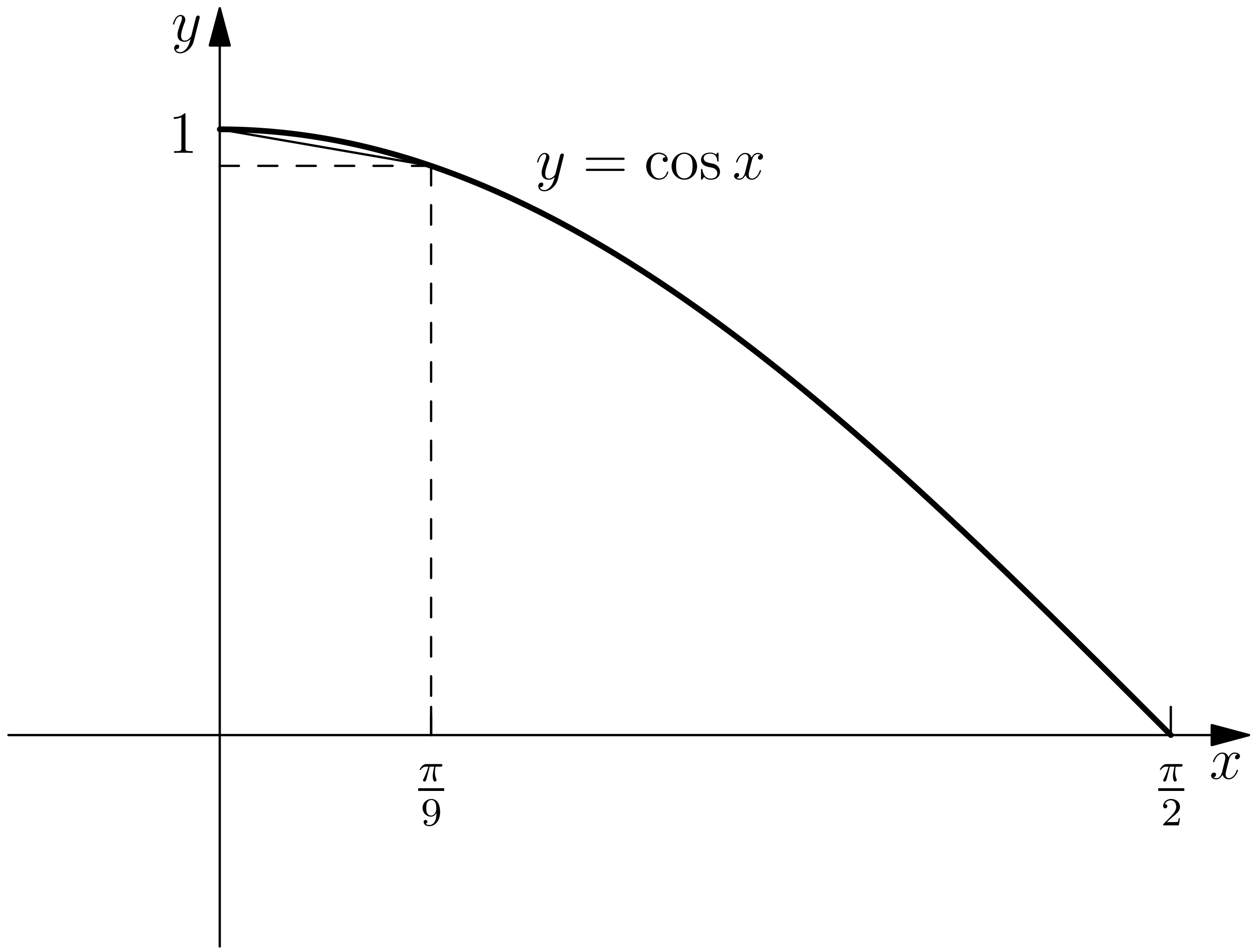
Viszont $2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 c} \geq 2$.

Tehát (3) bal oldala ≥ 2 és jobb oldala < 2, így ellentmondás, azaz $\overline{\exists}$ több megoldás.

14. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin 20^\circ > \frac{1}{3} \text{ (számológép nélkül)}$$

Megoldás. (Ábra!)



$$\sin 20^\circ = \sin\frac{\pi}{9} = \int_0^{\pi/9} \cos x dx > \frac{1+\cos\frac{\pi}{9}}{2}\cdot\frac{\pi}{9} \text{ (trapéz!)}$$

Jel.: $\sin\frac{\pi}{9} = a$, akkor $\cos\frac{\pi}{9} = \sqrt{1-a^2}$.

Így $a > \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{9}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{9} \Longrightarrow a > \dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\cdot$
$\dfrac{\pi}{9} \Longrightarrow a > \dfrac{36\pi}{\pi^2+18^2}$ (Ellenőrizni!!)

Így $\sin 20^\circ = \sin\dfrac{\pi}{9} = a > \dfrac{36\pi}{\pi^2+18^2} >$
$\dfrac{36\cdot 3,1}{324+3,2^2} = \ldots > 0,3338 > \dfrac{1}{3}.$

Megjegyzés. $\sin 20^\circ = 0,342\ldots$

A TANÁR az örökkévalóságnak dolgozik; soha nem tudhatja hol ér véget a hatása. (Henry Adams, XIX-XX. sz. történész filozófus)