

Szilassi Lajos:

Hány éves a kapitány?

Egy-egy szöveges feladat megoldásakor könnyen zavarba jönnek még azok a feladatmegoldók is, akik egyébként „jó matematikából”, ami többnyire azt jelenti, hogy kellő biztonsággal oldanak meg egyenleteket, vagy végeznek egyéb jól algoritmizálható, begyakorolható munkát. Ennek az lehet az oka, hogy a szöveges feladatok megoldásához sokkal több intuíciónak van szükség, nagyobb következetességgel kell feltenni maguknak azokat a kérdéseket, amelyeket Pólya György ajánlott minden feladatmegoldónak és tanárának a figyelmébe.

Nem véletlen, hogy ismételten Pólyára hivatkozom. Szerinte (és szerintem is) a jó tanár – jelöljük nagy **T**-vel – nem annyira előadóművész, mint inkább kérdező-művész. Mint minden művészet, ez is igényel némi rátermettséget, empátiát, de legalább ugyanannyi felkészültséget, tudatosságot, kitartó munkát.

Egy személyes megjegyzés: én Hajnal Imre Tanár (nagy **T**-vel) úrtól tanultam a kérdező művészetét, több mint harmincöt évvel ezelőtt. Nem merném magamat a fenti értelemben vett kérdező-művésznek nevezni, legfeljebb némi rutinnal rendelkező iparosnak.

Megkísérlek rekonstruálni néhány tanárjelölt koromban hallott – ma már esetleg fiktívnek, sőt esetenként idealizálnak tűnő – dialógust, amelynek a másik szereplője az ugyancsak nagy **D** - vel írt Diák, aki fogékony, érdeklődő, lelkeses, alkalmasint igen ötletes. Bár közel sincs a feladatmegoldásban akkora rutinja, mint **T**-nek, de azon van, hogy szert tegyen rá.

Próbálja meg a kedves olvasó önállóan megoldani az alábbi – talán nem túl nehéz feladatokat, majd figyelje meg, hogy a megoldás során a saját magának feltett kérdések – és válaszok – mennyire hasonlítanak az itt bemutatott dialógus kérdéseire és válaszaira, amelyekről persze koránt sem állíthatók, hogy a lehető legjobbak. Lehet, hogy egy kérdés „ott és akkor” jó, máskor kevésbé az. Minden esetre nem árt, ha ott van a tárházunkban.

T – amennyire csak lehet, igyekszik háttérben maradni, úgy irányítja a beszélgetést, hogy **D** úgy érezze, maga oldotta meg a feladatot. Ez mindkettőjüknek örömet okoz. A közösen végzett munka örömét, az önálló felfedezés örömét. **T** és **D** egyenrangúnak tűnő munkatársak, bár a feladatuk más-más, céljuk mindenképpen közös. Kölcsönösen tisztelik egymást, és mindketten nagy tisztelettel viseltetnek a szép, pontosan megfogalmazott, kristálytisza ötletek iránt.

1. A szilva 80%-a víz, de az aszalt szilvának csak 40%-a víz. Mennyi szilvából lesz 1 kg aszalt szilva?

Elsőként **T** töri meg a feladat tömörségéből, szokatlanságából adódó csöndet:

- *Mi történik a szilvával aszaláskor?*
- *Víz párolog el belőle.*
- *Más nem?*
- *Nem. A szárazanyag ugyanannyi marad.*
- *Mennyi szárazanyag marad az 1 kg. aszalt szilvában?*
- *60 dkg.*
- *Mennyi szárazanyag van 1 kg nyers szilvában?*
- *20 dkg, így 3 kg. szilvában van ugyanannyi szárazanyag, mint 1 kg. aszalt szilvában, tehát a válasz: 3 kg.*

2. *Egy agár kerget egy nyulat. A nyúlnek kilencven nyúl-ugrásnyi előnye van. Amíg az agár hetet ugrik, addig a nyúl tizet. Öt nyúl-ugrás ugyanakkora, mint két agár-ugrás. Hányat ugrik az agár, amíg utoléri a nyulat?*

Ismét **T** a kezdeményező, miután látja, hogy **D** erősen töri mind a harminc fejét, de igazából semmi jó ötlete nincs.

- *Hányféle távolság-egység van ebben a feladatban?*
- A nyúl-ugrás és az agár-ugrás.
- *Könnyebb lenne a feladat, ha csak egy lenne?*
- Igen. A negyedik mondat alapján át is számolhatók egymásba.
- *Milyen távolság-egységben lenne célszerű számolnunk?*
- Agár-ugrásban, mivel erre vonatkozik a kérdés.
- *Ekkor hogy szólna a feladat?*
- A nyúlnek $90 \cdot \frac{2}{5} = 36$ agár-ugrásnyi előnye van. Amíg az agár 7-et ugrik, addig a nyúl $10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ agár-ugrásnyit.
- *7 ugrással hány ugrásnyi hátrányt hoz be az agár?*
- 3-at, és mivel 36 ugrásnyi volt a hátránya, ezért $\frac{36}{3} \cdot 7$ -et, azaz 84-et kell ugrania, amíg utoléri a nyulat.

3. *4 és 5 óra között mikor fedi egymást az óra kis- és nagymutatója?*

Ismét egy tömör feladat, de ezúttal **D** kezdi a beszélgetést:

- Ez ugyanolyan verseny, mint az előbbi.
- *Valóban?*
- Igen, a kismutatónak van némi előnye, amit a gyorsabban haladó nagymutató be fog hozni.
- *Mennyi ez az előny?*
- 20 perc. Ezért most számoljunk mindent percben.
- *Honnan számítva 20 perc ez az előny?*
- 4 órától. Mondjuk azt, hogy akkor indultak, egyszerre. Ezért ugyanannyi ideig – a találkozásig – számítjuk az útjukat is.
- *Egy szokványos „Érj utol, ha tudsz!” versenyen, útról, időről, sebességről van szó. Ez a 20 perc most mi?*
- Általában idő, de a mi feladatunkban út is, az az út, amennyivel többet kell megtennie a találkozásig a nagymutatónak, mint a kicsinek.
- *Mit tudunk a sebességről?*
- A sebességük arányát ismertük, épp úgy mint az előző feladatban. A kismutató 12-szer halad gyorsabban, mint a nagy.
- *Mit mondhatnánk a mutatók útjáról?*
- A nagymutató útja is 12-szer akkora, mint a kicsié, hiszen ugyanannyi ideig figyeljük a mozgásukat.
- *Mennyi is a két út különbsége?*
- 20 perc, amely a nagymutató útjának a $\frac{11}{12}$ -ed része.
- *Így már azt is tudjuk, hogy mekkora utat tesz meg a nagymutató addig, amíg találkozik a kicsivel?*

- Igen, $20 \cdot \frac{12}{11}$ perccel, azaz $21 \frac{9}{11}$ perccel. Így a két mutató 4 óra után $21 \frac{9}{11}$ perccel fedi egymást.

4. A-ból B-be egy személy és egy gyorsvonat közlekedik. A személyvonat sebessége 60, a gyorsé 120 km/óra. A menetrend szerint éppen egyszerre kellene megérkezniük B-be, de most a személyvonatnak az út $\frac{3}{4}$ -énél felére kellett csökkentenie a sebességét, így a gyors B előtt 30 km-rel utolérte. Mekkora az AB távolság?

Újból **D** kezdi a dialógust:

- Nincs a feladatban semmilyen időre vonatkozó adat.
 - *Lehet, hogy nem is lesz rá szükségünk.*
 - Válasszuk az egész utat x -nek, fejezzük ki a két vonat menetidejét,
 - *Talán ne siessük el a dolgot, hátha még a sebességekre sem lesz szükségünk külön-külön.*
 - Valóban, az előző feladatokban is csak a sebességek arányát ismertük. Az út háromnegyed részéig a gyors kétszer olyan sebességgel haladt, mint a személyvonat.
 - *Hol volt a személy akkor, amikor a gyors elindult.*
 - Az út felénél, mivel a menetrend szerint egyszerre kellett volna megérkezniük.
 - *A gyors indulásától számítva mennyi utat tett még meg a személy a menetrend szerinti sebességével?*
 - Az egész út $\frac{1}{4}$ -ed részét, vagyis a hátralévő út felét.
 - *Hol volt a gyorsvonat, amikor a személy eddig elért?*
 - Az út felénél, hiszen amíg a személy megtesz $\frac{1}{4}$ résznyi utat, addig a gyors $\frac{1}{2}$ résznyit tesz meg.
 - *Itt viszont történt valami.*
 - Igen. Innen kezdve a személyvonat sebessége felére, a gyors sebességének a negyedére csökkent.
 - *Meg lehetne ezt másképpen is fogalmazni?*
 - Igen. Az út háromnegyed részétől a két vonat találkozásáig megtett út négyszeresét tette meg a gyorsvonat az út felétől számítva.
 - *A személyvonat csökkentett sebességgel megtett útjánál mennyivel többet kellett megtennie a gyorsvonatnak ugyanannyi idő alatt?*
 - Háromszor akkorát.
 - *Azt is lehet tudni, hogy ez az egész út hanyadrésze?*
 - Igen, $\frac{1}{4}$ része. Ez azt jelenti, hogy az egész út $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ -ed részét tette meg a személyvonat csökkentett sebességgel.
 - *Valóban. Eszerint mennyi az út B-ig hátralévő része?*
 - A teljes út $\frac{2}{12}$ -ed része, ami 30 km.
 - *Akkor már kiszámítható a teljes út is?*
 - Igen, ha a $\frac{2}{12}$ -ed része 30 km, akkor a teljes út ennek hatszorosa, azaz 180 km.
- Ráadásul ezt a feladatot is fejben oldottuk meg.
- Szép megoldás volt.

5. *Lassan halad egy hajó a folyón. A hossza – a parton vele párhuzamosan haladva – az orrától a tatjáig mérve 120, a tatjától az orráig 240 lépésnek tűnik. Valójában hány lépésnyi a hajó?*

T egy váratlan, de sokat segítő kérdéssel mozdítja ki gondolatmenetet a teljes tanácstalanság állapotából:

- *Mihez képest volt lassú ez a hajó?*
- Nyilván ahhoz a gyalogoshoz képest, ki megmérte, hogy hány lépés. A tatjától az orráig csak akkor tudta megmérni, ha gyorsabban lépkedett, mint ahogy a hajó haladt.
- *Valóban. Van még a feladatban ki nem mondott, de hallgatólagosan feltételezett körülmény?*
- Igen. A gyalogosnak a parton egyenletes, és oda-vissza azonos sebességgel kell lépkednie, különben szépen elúszhat mellette a hajó, vagy legalábbis használhatatlan a két adat.
- *Mennyi a két mérés átlaga?*
- 180 lépés.
- *Vajon ennél több, vagy kevesebb a hajó valódi hossza?*
- Az is lehet, hogy éppen annyi.
- *Képzeljük el, hogy a gyalogos sokkal lassabban lépked. Szembe mérve mondjuk 10 lépésnyinek találja a hajót, vele egy irányban haladva viszont alig tud vele lépést tartani, ezért 1000 lépésnyi idő alatt jut el a tatjától az orráig.*
- Valóban. Biztosak lehetünk abban, hogy a hajó valódi hossza kevesebb, mint 180 lépés. A hajó több utat tesz meg az alatt, amíg a tatjától az orráig mérjük, mint ha szembe haladunk vele.
- *Térjünk vissza az eredeti adatainkhoz. Vajon mire lenne egyszerűbb válaszolni? Arra a kérdésre, hogy „mennyivel többet”, vagy arra, hogy „hányszor többet”?*
- Arra, hogy „hányszor többet”. Kétszer.
- *Miért?*
- Mert a gyalogos számára a 240 lépés éppen kétszer annyi ideig tart, mint a 120.
- *Ha ismernénk a hajó valódi hosszát, hogyan tudnánk kiszámolni a mérés alatt megtett útját, ha pl. az orrától a tatjáig mérjük?*
- A hajó tényleges hosszából le kell vonni a mért távolságot, azaz 120 lépésnyit, mivel szembe haladt egymással a hajó és a gyalogos.
- *Ha viszont a tatjától az orráig mérjük?*
- A mért 240 lépésből kell levonni a hajó valódi hosszát, mivel ekkor egy irányba haladtak.

Itt **T** úgy érezte, nem kell többet megszólalnia. **D** hamarosan folytatta is a gondolatmenetet:

- Legyen a hajó hossza x . Ekkor $2(x-120)=240-x$. Ebből pedig x könnyen kiszámolható.
- *Nos?*
- A hajó hossza 160 lépésnyi. Már csak azt nem tudjuk, hogy hány éves a kapitány.
- *A következő feladatból ez is kiderül.*

6. *A hajó és a kapitány együtt hetven éves. Hány éves a kapitány, ha a hajó most kétszer olyan idős, mint a kapitány volt akkor, amikor a hajó annyi idős volt, mint most a kapitány?*

A feladatról először **D** fejt ki az eléggé lesújtó véleményét:

- Kellemetlen feladat. A második mondatot nem is értem.
 - *Próbáljuk részekre bontani.*
 - Legfeljebb a kérdést tudnánk leválasztani róla.
 - *Hány időpontról van szó a feladatban?*
 - Kettőről. Az egyik a „most”, a másik egy régebbi: „akkor amikor”.
 - *Mondjuk, hogy „hajdan”. Itt a „hajdan” szó egy korábbi, most még nem ismert, de konkrét időpontot jelent. Ezzel sem tudjuk több mondattá alakítani a feladatot?*
 - De igen.
A hajó most kétszer olyan idős, mint a kapitány volt hajdan.
Hajdan a hajó éppen annyi idős volt, mint most a kapitány.
 - *Végül is hány életkor szerepel a feladatban?*
 - Négy: a hajó és a kapitány mostani, valamint a „hajdani” életkora.
 - *Milyen kapcsolat van köztük?*
 - Legyen a hajó mostani életkora x , ezzel kifejezhető az összes többi életkor.
 - *Könnyebben át tudnánk tekinteni a feladatot, ha táblázatba foglalnánk az életkorokat?*
- | Életkorok | most | hajdan |
|-----------|--------|------------------|
| hajó: | $70-x$ | x |
| kapitány: | x | $\frac{70-x}{2}$ |
- Igen. Az a baj, hogy a táblázat készítésekor minden feltételt kihasználtunk.
 - *Valóban?*
Azt lehet-e tudni, hogy a hajó, vagy a kapitány az idősebb?
 - Biztosan a hajó, mivel hajdan volt annyi idős, mint most a kapitány.
 - *Hajdan is így volt?*
 - Erre gondolnunk kellett volna. Az idő múlásával nem változik az életkorok közötti különbség. Ebből egy egyenlet írható fel: $(70-x) - x = x - \frac{70-x}{2}$ Ugyanezt az egyenletet kapnánk akkor is, ha azt használnánk ki, hogy a hajó és a kapitány életében nyilvánvalóan ugyanannyi év telt el a hajdani időponttól máig.
 - *Nos, hány éves a kapitány?*
 - Harminc. A hajó pedig negyven. Hajdan – tíz évvel ezelőtt – amikor a kapitány húsz éves volt, akkor a hajó harminc éves volt: annyi, mint most a kapitány.

Pillanatnyi csend. Ezalatt mind **T** mind **D** arra gondol, hogy de szép dolog a matematika. Csak ezt nem mondani kell, hanem érezni.