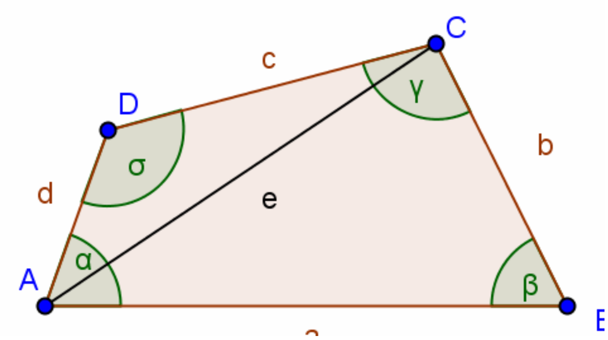
Maximális területű négyszög

A négyszög.mws MAPLE fájlt készítette: dr. Szilassi Lajos
E-mail: szilassi@jgytf.u-szeged.hu

A feladat:

Legyen adott egy négyszög négy oldala. Mutassuk meg, hogy a négyszög területe akkor maximális, ha az húrnégyszög.
Használjuk az ábra jelöléseit:




```
> restart;
```

Írjuk fel a koszinusztételt az *ABC* és az *ACD* háromszögekre:

(Legyen x = cos(β), y = cos(δ) . Ekkor $\sin(\beta) = (1-x^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ és $\sin(\delta) = (1-y^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

```
> e1:=a^2+b^2-2*a*b*x;
> e2:=c^2+d^2-2*c*d*y;
```

$$e1 := a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,x$$

$$e2 := c^2 + d^2 - 2\,c\,d\,y$$

A négyszög területe legyen *T*.

```
> T:=a*b*sqrt(1-x^2)/2 +c*d*sqrt(1-y^2)/2;
```

$$T := \frac{a\,b\,\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{c\,d\,\sqrt{1-y^2}}{2}$$

Mivel *e*-t két háromszög oldalaival és szögeivel is kifejeztük, *y* , ez alapján *T* is kifejezhető *x*-el:

```
> y:=solve(e1=e2,y);
```

$$y := -\frac{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,x - c^2 - d^2}{2\,c\,d}$$

```
> T;
```

$$\frac{a\,b\,\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{c\,d\,\sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,x - c^2 - d^2)^2}{4\,c^2\,d^2}}}{2}$$

T-t *x* szerint deriválva keressük *T* maximumát:

```
> g:=diff(T,x);
```

$$g := -\frac{a\,b\,x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{(a^2+b^2-2\,a\,b\,x-c^2-d^2)\,a\,b}{4\,c\,d\sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-2\,a\,b\,x-c^2-d^2)^2}{4\,c^2\,d^2}}}$$

```
> solve(g=0,x);
```

$$\frac{-c^2+a^2+b^2-d^2}{2\,(-c\,d+a\,b)},\ \frac{-c^2+a^2+b^2-d^2}{2\,(a\,b+c\,d)}$$

```
> x1:=1/2*(-c^2+a^2+b^2-d^2)/(a*b+c*d);
> x2:= 1/2*(-c^2+a^2+b^2-d^2)/(a*b-c*d);
```

$$x1 := \frac{-c^2+a^2+b^2-d^2}{2\,(a\,b+c\,d)}$$

$$x2 := \frac{-c^2+a^2+b^2-d^2}{2\,(-c\,d+a\,b)}$$

Ahhoz, hogy megállapítsuk a szóba jöhető esetek közül melyik a keresett szélsőérték, ideiglenesen adjunk a paramétereknek konkrét értéket:

```
> a:=8;b:=7;c:=6;d:=5;
```

$$a := 8$$

$$b := 7$$

$$c := 6$$

$$d := 5$$

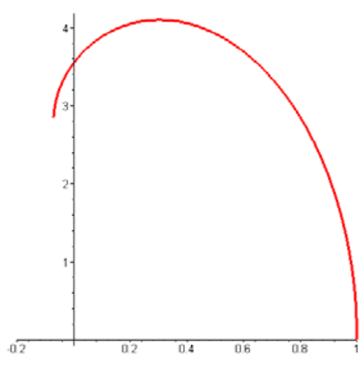
```
> x1;x2;
```

$$\frac{13}{43}$$

$$1$$

Rajzoljuk le a T függvényt:

```
> plot(T/10,x=-0.2..1);
```



Térjünk vissza az általános eset vizsgálatához:

```
> a:='a':b:='b':c:='c':d:='d':
> x:=1/2*(-c^2+a^2+b^2-d^2)/(a*b+c*d);
```

$$x := \frac{-c^2+a^2+b^2-d^2}{2\,(a\,b+c\,d)}$$

```
> y;
```

$$-\frac{a^2+b^2-\frac{a\,b\,(-c^2+a^2+b^2-d^2)}{a\,b+c\,d}-c^2-d^2}{2\,c\,d}$$

```
> simplify(x+y);
```

$$0$$

Eszerint $\cos(\beta)=-\cos(\delta)$ és $\sin(\beta)=\sin(\delta)$ azaz β és δ valóban kiegészítő szögek.
Ezt akartuk belátni.

Határozzuk meg a négyszög köréírt körét az előbbi konkrét esetben:

```
> k:= r-> arcsin(a/2/r)+ arcsin(b/2/r)+ arcsin(c/2/r)+
arcsin(d/2/r);
```

$$k := r \rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{2}\frac{a}{r}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\frac{b}{r}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\frac{c}{r}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\frac{d}{r}\right)$$

```
> a:=8;b:=7;c:=6;d:=5;
```

$$a := 8$$

$$b := 7$$

$$c := 6$$

$$d := 5$$

```
> k(r);
```

$$\arcsin\left(\frac{4}{r}\right)+\arcsin\left(\frac{7}{2\,r}\right)+\arcsin\left(\frac{3}{r}\right)+\arcsin\left(\frac{5}{2\,r}\right)$$

```
> solve(k(r)=Pi);
```

$$\frac{\sqrt{15364545}}{840}$$

```
> Digits:=15;
> fsolve(k(r)=Pi,r=0..8);
```

$$Digits := 15$$

$$4.66638498299527$$

```
> evalf(1/840*15364545^(1/2));
```

$$4.66638498299527$$

```
> beta:=evalf(180*arccos(x)/Pi);
```

$$\beta := 72.4026633919202$$

```
> T;evalf(T);
```

$$\frac{\sqrt{1680}\,\sqrt{1849}}{43}$$

$$40.9878030638384$$

Az így kapott eredmények összhangban vannak a GeoGebrával kapott eredményekkel.