Összefüggések:

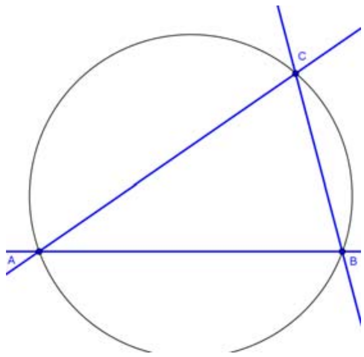
AZ ABC háromszög Wallace - Simson egyenesei

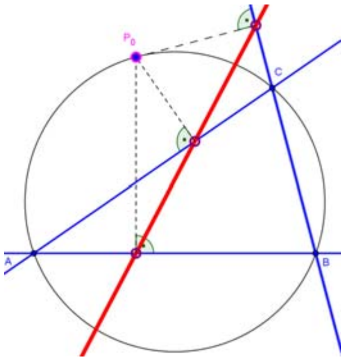
S 9.ggb

Minit a fenti cím és a fájl cím-felirata ígéri, ebben a fájlban szemléletesen összefoglaljuk azokat a kapcsolatokat, amelyeket Bartók Imre középiskolai tanár a KöMaL 1906. évi decemberi számában közölt „ *A Simson féle egyenesek burkoló görbéje*” c. cikkében.

A rajzlap bal oldalán van egy csúszda, amely azt szabályozza, hogy miként adjuk meg az ABC háromszöget. Van továbbá jó néhány jelölőnégyzet, (kétállapotú kapcsoló) amelyek hatását rendre elemezni fogjuk. Ezekre a □ jellel és a nevükkel fogunk hivatkozni.

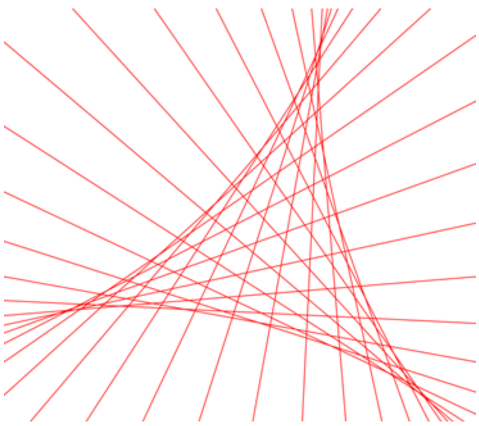
□ A háromszög jelölőnégyzetet bekapcsolva csak a háromszög *a, b, c* oldal egyeneseit és *k* köréírt körét láthatjuk. □ Egy Simson egyenes –t is bekapcsolva megjelenik egy (alaphelyzetben a *k* körön mozgatható) P_0 pont, és az ezzel előállított *s* Simson egyenes. P_0 „kézzel” mozgatható, vagy bekapcsolható az animáció.

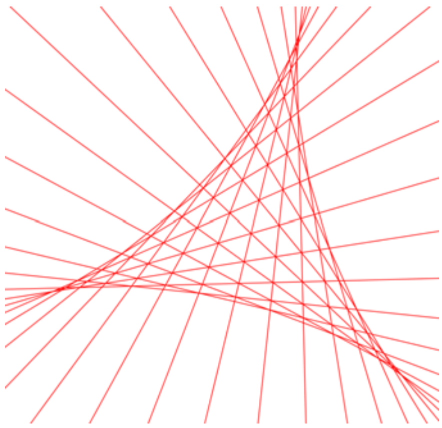




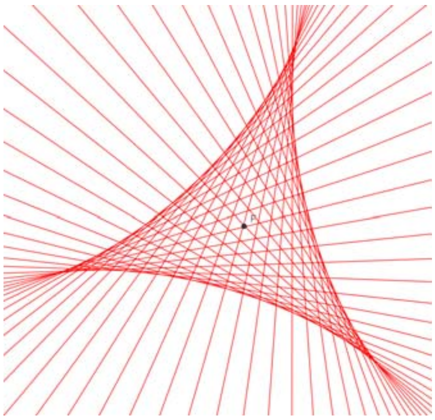
Lényegében azt vizsgáljuk, hogy mit ír le *s*, miközben P_0 körbe fut *k* –n.

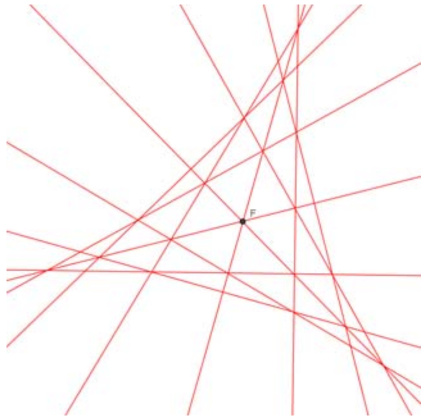
Ugorjunk kicsit előre, kapcsoljuk be az □Az egyenessereg –et. Ezzel megjelenik a programunk eredménye, az *ABC* háromszöggel előállított Simson egyenesek közül véges sok. (A szép ábra vizsgálata érdekében célszerű ideiglenesen kikapcsolni a már említett két jelölőnégyzetet.





Mindkét ábra sugallja, hogy egy 120°-os forgásszimmetriájú alakzat alakult ki a Simson egyenesek látható részhalmazából, amelynek a centrumát a □ Középpont –tal tehetjük láthatóvá. Ekkor Megjelenik egy csúszka is amellyel az szabályozható, hogy a Simson egyenesek halmazából többet, vagy kevesebbet szeretnénk-e látni. Láthatóvá tehetők a □Pontok a k körön -nal azok a pontok, amelyek az éppen látható Simson egyeneseket állítják elő. A csúszka mozgatásával ezek számát növelhetjük, vagy csökkenthetjük.

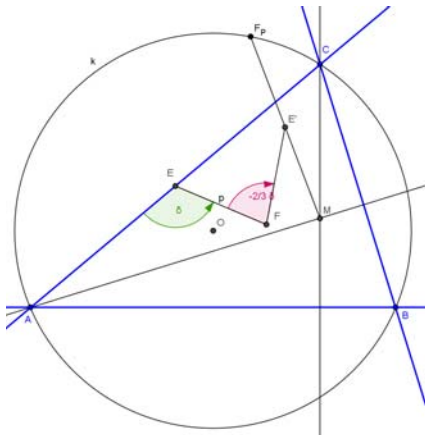


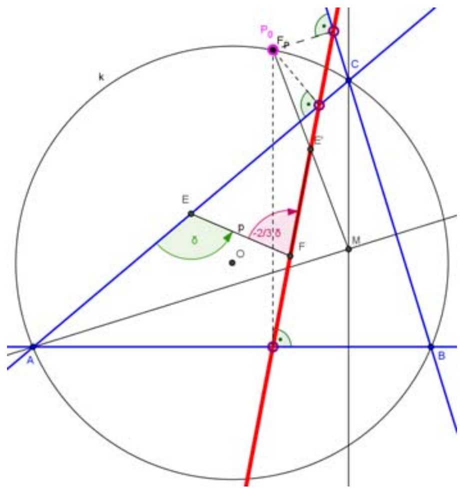


A Beosztás szöveg melletti szám a k körön lévő két szomszédos ponthoz tartozó középponti szöget mutatja. Könnyen észrevehetjük, hogy a szomszédos Simson egyenesek éppen feleakkora szöget zárnak be egymással, mint az őket előállító pontok középponti szöge. A csúszkával előállított szögek 120°osztói, ez biztosítja a tapasztalható illeszkedéseket.

Ismét láthatóvá téve a □A háromszög- et és a □Egy Simson egyenes –t és kikapcsolva a □Fix kezdőpont -ot, a P_0 pont mozgatásával „ki tudjuk tapogatni” azt a helyzetet amikor három-három Simson egyenes egy pontra illeszkedik. Ez a pont megszerkeszthető.

Ezt a rajzot a □Háromszög és a □Fix kezdőpont szerkesztése jelölőnégyzeteket be és a többit kikapcsolva állíthatjuk elő. Itt M az ABC háromszög magasságpontja O, a k kör középpontja, E az AC oldalnak F az OM szakasznak a felezőpontja.





Bartók Imre cikkét követve használtuk ki, hogy a P_0 ponthoz tartozó Simson egyenes akkor illeszkedik az F pontra, ha az $EF\,P_0$ szög -2/3 szorosa az AEF szögnek.

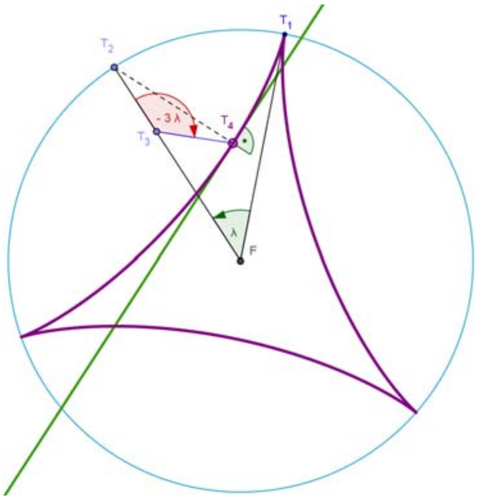
Így a □Fix kezdőpont lényegében az szabályozza, hogy a P_0 pont egy a k-n szabadon mozgatható pont legyen-e, vagy essen egybe az így megszerkesztett F_P ponttal. Az E' pontot úgy kaptuk E-ből, hogy E-t F körül elforgattuk $-2/3.\delta$ szöggel. Ebből F_P -t pedig úgy, hogy E'-t F-ből 2-szeresére nyújtottuk. (Itt használtuk ki, hogy a P_0 ponthoz tartozó Simson egyenes felezi a P_0M szakaszt.)

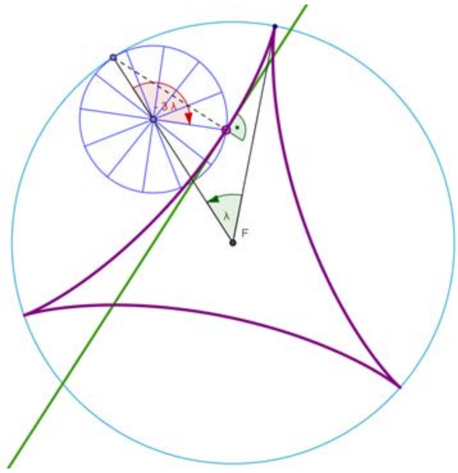
Megjegyezzük még, hogy F pont az ABC háromszög Feuerbach körének a középpontja, amelyet a k körből egy M középpontú ½ arányú centrális nyújtással kapunk. Erre illeszkedik E és E' is.

Az az alakzat, amelyet az összes Simson egyenes burkol, az un. Steiner deltoid ,amelyet Jacob Steiner[1] fedezett fel. Ez az alakzat □ A burkolt hipociklois jelölőnégyzettel tehető láthatóvá.

[1] Jacob Steiner (1796-1863) svájci matematikus

Ezt a görbét ugyancsak Bartók Imre cikke nyomán szerkesztettük meg. Felvettük az *M* középpontú *3p* sugarú kört, ahol *p=EF*, a Feuerbach kör sugara. Ezt belülről érintve körbe gördül egy p sugarú kör, amelynek a kerületére illeszkedő minden pont egy-egy Steiner deltoid néven ismert speciális hipocikloist ír le.

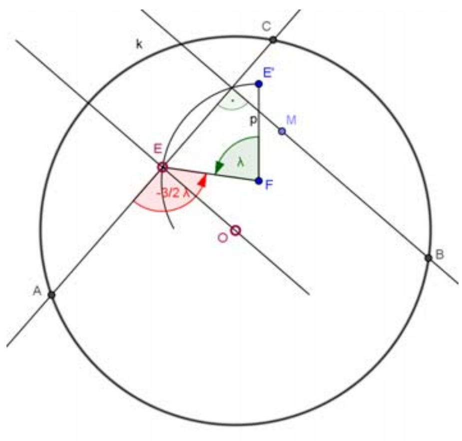




Ezek közül az, amelyet az *ABC* háromszög összes Simson egyenese érint, az lesz, amelynek egyik csúcsa T_1 A gördülő körnek a görbét leíró (nyomot hagyó) pontjának ide kell esnie "induláskor". Amíg az álló és gördülő kör aktuális érintési pontja T_2 az álló kör *F* középpontjához képest λ szöggel mozdul el, maga a mozgó kör a saját középpontja T_3 körül pontosan -3λ –nyit fordul el, hiszen a sugara *p*, míg az álló köré*3p* . Így a T_4 pont írja le a cikloist. □ A hipociklois szerkesztése. A T_4 -beli érintő T_4 körül ezalatt -3/2λ nyit fordul. De ezt forgást nem is kell külön megadnunk, mert ebből adódóan a kihasználhatjuk, hogy a T_4 -beli érintő merőleges lesz a T_2T_4 szakaszra. □ Animáció.

Megjegyezzük még, hogy ha nem az *ABC* szabad pontjaihoz szerkesztjük meg a köréírt *k* kört, hanem felveszünk egy fix *k* kört, és azon az *A, B, C* pontokat, akkor a Simson egyenesek halmaza bármely háromszögre nézve egybevágó lesz, csak az elhelyezkedése lesz más. Ezt a csúszkát **2.** állapotúra húzva érhetjük el.

Még érdekesebb a kérdés, ha magát a Feuerbach kör *F* középpontját és pl. az *E'* pontját vesszük fel fix pontként. Ez a csúszka **3.** helyzete: □ E és O választható *E*-t úgy kell felvennünk, hogy az egy *F* középpontú 120°-os középponti szögű köríven mozoghat. Ezekből megszerkeszthető az *ABC* háromszög *b* egyenese, és az a szakasz, amelyre az *O* pontnak illeszkednie kell ahhoz, hogy az *ABC* háromszög csúcsait megszerkeszthessük. □ A, B, C szerkesztése



Így a gombhoz megkeresve a kabátot, választ kapunk arra a kérdésre, hogy melyek azok az *ABC* háromszögek, amelyek Simson egyeneseinek a halmaza, így az ezekkel burkolt hipociklois előre egyértelműen meghatározott.