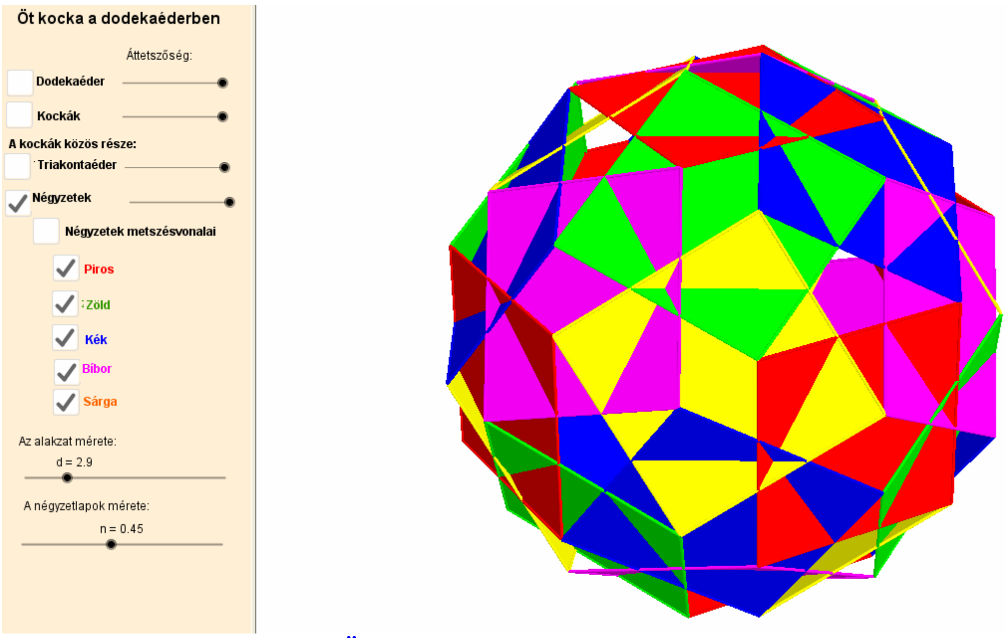
A dodekaéderbe írt öt kocka

és „melléktermékei”

A Geomatech program és az Élményműhely résztvevői körében - de feltehetően másutt is - igen népszerű az a George Hart által kidolgozott modell, amely harminc, megfelelő bevágásokkal előkésztett négyzetlapból állítható össze.

A sikerélményt a legtöbbünk számára az adja, hogy viszonylag egyszerű eszközökkel rövid idő alatt össze tudunk állítani egy meglehetősen összetett, látványos, kézbe vehető konstrukciót. Ezt a konstrukciót fogjuk most alapos matematikai elemzésnek alávetni egy ezt (is) bemutató GeoGebra program segítségével, majd kitérünk e program előállításának a körülményeire.

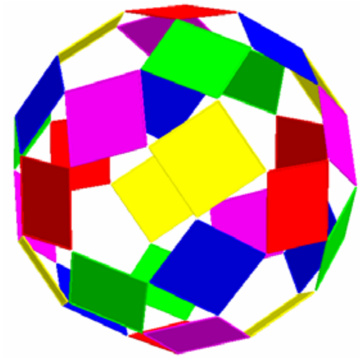
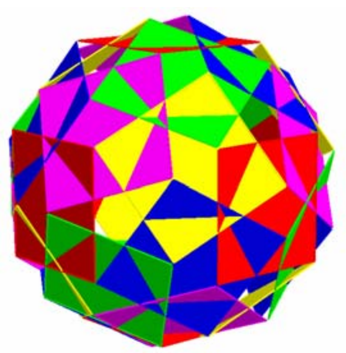
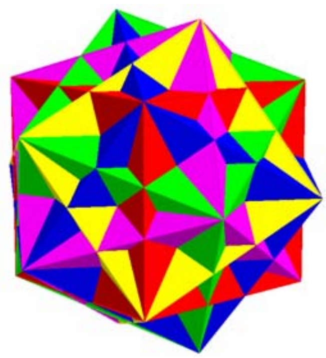


Öt kocka - 30 négyzet.ggb

Akinek alkalma volt elkészíteni, vagy legalább kézbe venni egy a fentihez hasonló, színek szerint is helyesen összeállított konstrukciót, bizonyára észrevette, hogy a hat azonos színű lap síkjai egy-egy kockát alkotnak.

Ez a GeoGebra fájl egyebek között ezt a 30 négyzetlapot mutatja be, jelen esetben úgy, hogy a lapokat centrális nyújtással nagyobbra és kisebbre lehet venni a $0 \leq n \leq 1$ értékek között változtatható csúszkával, ahol a nyújtás középpontja rendre a négyzetek középpontja. Így e művelet hatására a négyzetek síkja ugyanaz marad, csak a mérete változik.

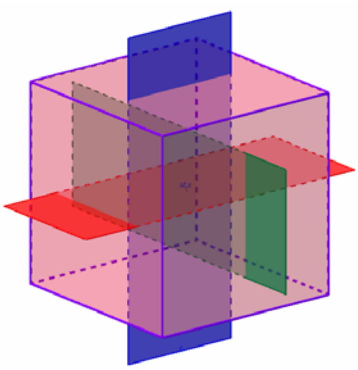
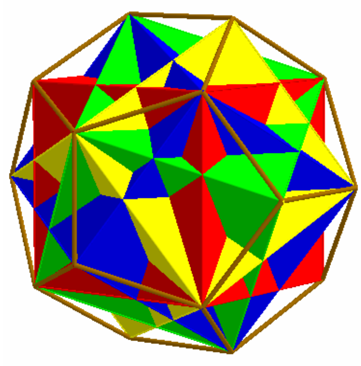
Nem szeretnénk elvenni olvasóinktól az önálló felfedezés örömét. Javasoljuk a program összes lehetséges beállításának a kipróbálását. Pl. vajon mikor és miért változik meg olykor az *n* csúszda színe? Mi ennek a geometriai tartalma? Mi történik, ha csak egy, vagy két szín látható?

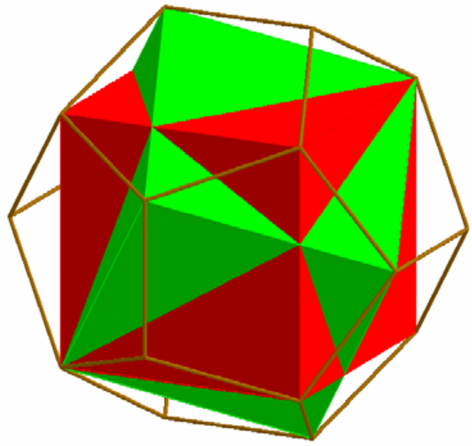
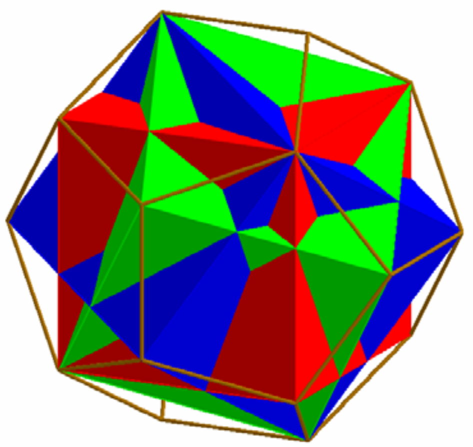
Később meg fogjuk vizsgálni, hogy *n*-et 0-ról folyamatosan növelve milyen *n* érték fogják a négyzetek a csúcsaikban érinteni a szomszédosakat, majd *n*-t tovább növelve a távolabbiakat, végül $n=1$ esetben eljutva addig, hogy az azonos színű lapok egy-egy kockát alkotnak. Az így kapott öt kocka csúcsai egy 12 szabályos ötszöggel határolt dodekaéder csúcsai lesznek.

Valóban? Fordítsuk meg a vizsgálódásunk irányát, induljunk ki a 12 szabályos ötszögekkel határolt dodekaéderből.

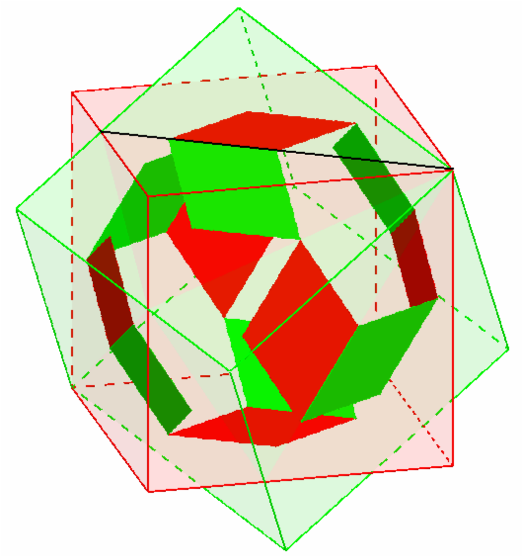
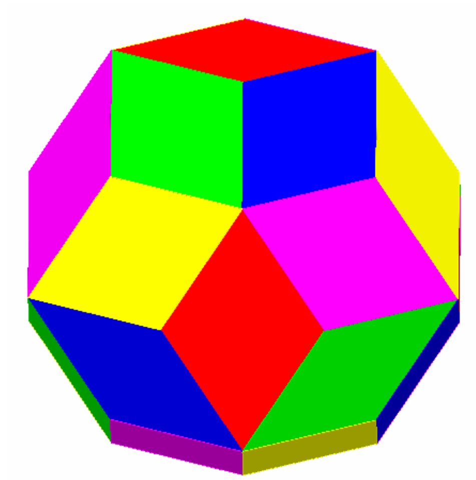
Szinte biztosak lehetünk abban, hogy ha egy matematikai problémában elénk kerül egy szabályos ötszög, akkor ott szóba kerül az aranymetszés fogalma. Például akkor, ha meg akarjuk adni a legtöbb (azaz 20) csúcsot tartalmazó dodekaéder csúcsainak a koordinátáit. Könnyen belátható, hogy ha egy dodekaéder csúcsai közül 8 egy egységnyi élű kocka csúcsa, akkor a többi 12 három olyan téglalapot alkot, amelynek az oldalai: $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ill. $\phi - 1 = \dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Eszerint a szabályos dodekaéder csúcsai közül tényleg ki tudunk választani nyolc olyat, melyek egy kocka csúcsai. Minden kocka-él a dodekaéder egy-egy lapátlója, így a dodekaéder 5•12=60 lapátlója egyben az öt dodekaéderbe írt kockának az éle.

Vizsgáljuk most meg két, majd három kocka kölcsönös helyzetét.

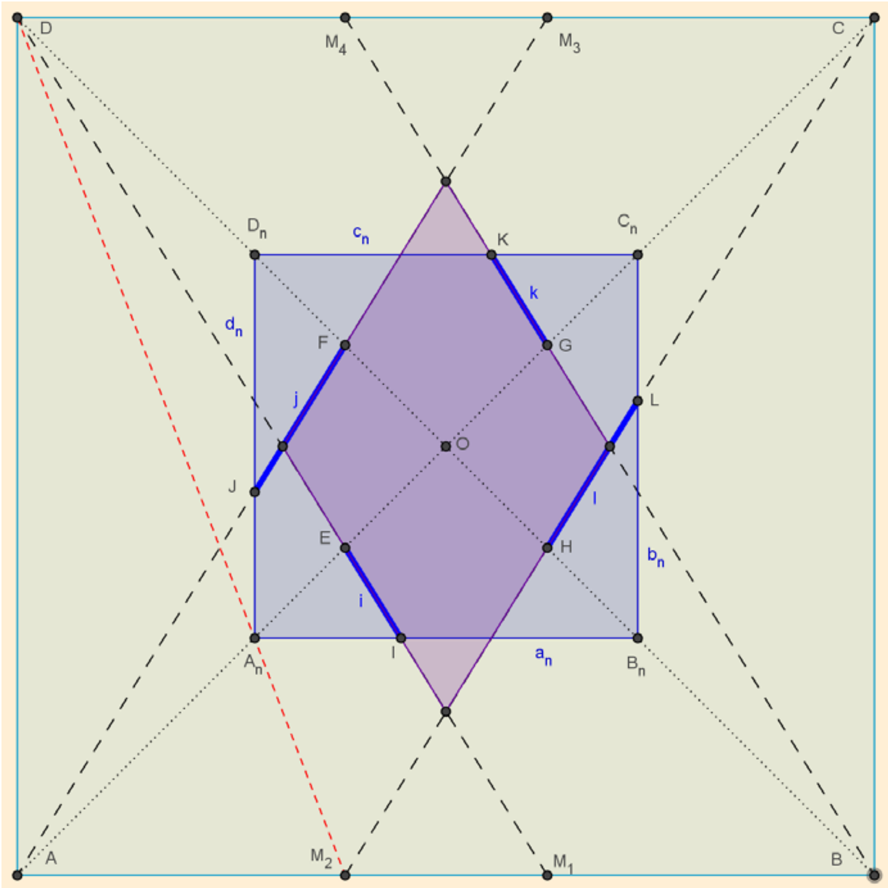
 

Könnyen belátható, hogy bármely két kockának pontosan két közös csúcsa van, amelyek a dodekaéder és mindkét kocka szemközti csúcsai. A kockák e csúcsokra nem illeszkedő élei a dodekaéder lapátlói, így ezeknek az éleknek a metszéspontjai rendre az aranymetszés arányában osztják a két kocka egymást metsző éleit. Pl. a piros koca egy lapját a zöld kocka három lapja metszi. A kiszemelt lapra eső metszésvonalak közül az, amely legközelebb esik a lap középpontjához, egyben éle lesz annak a poliédernek, amelyet az összes kocka metszeteként kapunk. Az öt kocka közös része egy un. rombikus triakontaéder lesz, amelyet harminc arany-rombusz alkot. (Az aranyrombusz átlóinak az aránya az aranymetszés aránya.)

Mivel a Hart-féle konstrukció négyzetlapjai a kockák síkjaival esnek egybe, a triakontaéder élei lesznek majd e négyzetek metszésvonalai is. Így fontos szerepük lesz abban, hogy meghatározzuk, hol és meddig kell bevágni a modellkészítéshez használt négyzetlapokat.

Készítsünk egy síkbeli rajzot a kocka egy lapjáról. Ennek a csúcsai legyenek *A, B, C és D.* Az *AB* és a *CD* szakaszt az aranymetszés arányában osztó pontok legyenek M_1 és M_2, ill. M_3 és M_4. (Ezek felvételéhez megtartottuk a Öt kocka - 30 négyzet.ggb fájl, fix, konstans értékeit, amelyekre ott a térbeli alakzatok megadásához volt szükség.)



Egy négyzelap adatai.ggb

A térbeli ábráink alapján be tudjuk rajzolni azokat a szakaszokat, ahol ezt a lapot a többi kocka lapjai metszik: A négyzetlap O középpontjához legközelebbi metszésvonalak M_1D, M_2C, M_3A és M_4B. Ezek a szakaszok zárják közre azt az aranyrombuszt, amely az összes kocka metszetként kapott triakontaédernek erre a kockalapra eső lapja lesz. Az, hogy ez valóban aranyrombusz, rövid (hasonlóságon alapuló) számolással igazolható.

Az $A_nB_nC_nD_n$ négyzetet egy O centrumú centrális állítottuk elő az ABCD négyzetből nyújtással - amit most a $0 \leq n \leq 1$ feltétel miatt zsugorításnak is nevezhetünk.

Némi számlással kapjuk, hogy $n = \sqrt{5} - 2 \approx 0.236$ értéke mellett következik be, hogy $A_n = E$. A szomszédos négyzetek ekkor egy-egy pontban érintkeznek, ennél kisebb n érték esetén nincs közös pontjuk.

Ugyancsak a térbeli alakzatok tanulmányozásával juthatunk arra az eredményre, hogy ha az A_n pont éppen illeszkedik az M_2D szakaszra, akkor A_n egy másik négyzet csúcsával esik egybe. Ez $n = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447$ esetben következik be. Ennél nagyobb n érték esetén a négyzetek másutt is metszik egymást, így ez a legnagyobb olyan n érték, amely még alkalmas a papírmodell elkészítésére. Így $\sqrt{5} - 2 < n \leq \frac{\sqrt{5}}{5}$ arányú nyújtás esetén kapunk egymást egyetlen szakasz mentén metsző négyzetlapokat. Ezek közül nyilvánvalóan a legnagyobb a legjobb, amit a Hart-konstrukció is használ. Ez az az eset, amelyben, az *I, J, K* és *L* pontok egyaránt az aranymetszés arányában osztják az $A_nB_nC_nD_n$ négyzet oldalait.

Figyelemre méltó lehet még az az ugyancsak realizálható, papírmodell készítésére alkalmas eset, amelyben három szomszédos négyzet közös pontja az él felezőpontjába esik. Ekkor

$n = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$. Ezt most – szándékosan - nem mutatjuk meg. Könnyen beállítható: elegendő a parancssorba beírni az n=(3-sqrt(5))/2 parancsot.

Arra is lehetne némi választási lehetőségünk, hogy meddig vágjuk be a négyzetlapra eső metszésvonal egyik és másik darabját. Lényeg, hogy a két bevágott rész összegének akkorának kell lennie, mint a rombusz élének a négyzetre eső szakasza. Egyetértve Hart-al, ezt nem tekintettük változtatható adatnak, a bevágás belső végpontját mindig a négyzet átlójára helyeztük. Érdemes megjegyezni, hogy ekkor a két bevágott rész aránya mindig az aranymetszés aránya *n* minden (szóba jöhető) értékétől függetlenül.

Mindezt azért volt célszerű ilyen alaposan elemezni, mert az itt kapott eredményeket fel lehetett használni a Saját eljárás.ggb fájlban. Szinte pontosan megismételve az itt alkalmazott szerkesztéseket. A különbség mindössze annyi, hogy ebben az *A, B, C, D* pontokat térbeli koordinátákkal adtuk meg, természetesen ügyelve arra, hogy a négy térbeli pont egy négyzetet határozzon meg. Az ezzel kapott két eljárás a Négyzet nyújtása (NY).ggt és a Négyzet metszésvonalai (MV).ggt eljárás, amelyeket 30 alkalommal kell majd használnunk, miután megadtuk a dodekaéderbe írt öt kocka lapjait.

Itt teszteltük a két saját eljárást: Saját eljárás teszt.ggb. A feladat jellegéből adódik, hogy nem mindegy, hogy a MV[t,P,Q,R,S] vagy MV[t,Q,R,S,P] sorrendben adjuk meg a négyzet négy pontját. Meggyőződhetünk róla, hogy ha a négy pont egyikét elmozdítjuk úgy, hogy egy síkban maradjanak, akkor még kapunk valamilyen eredményt, de ha nincsenek egy síkban, akkor nem. (Nem véletlenül adtuk meg a négyzet *O* középpontját az átlók metszéspontjaként.)

Maga az öt kocka megadása e sorok írójának nem jelentett nagy munkát. Ugyanis akadt az „íróasztal fiókban” öt kocka egy Euler3D fájl formájában. 5_kocka.elr Ebből ki lehetett nyerni az alakzatok koordinátáit, és a lapok listáját, ahol a minden síkidomot a csúcsok sorszámával adtunk meg: 5_kocka_elt.txt Ezt néhány karakter cseréjével és a csúcsok koordinátáinak a pontos képlettel megadott értékével olyan alakra lehetett hozni, amely bemásolható a GeoGebra parancssorába: 5 kocka ggb-hez.txt

Addig, amíg egy sokszög megadásához mindegy, hogy melyik csúccsal kezdjük a csúcsok sorszámait felsorolni, jelen esetben erre a metszésvonalak megadása miatt ügyelni kellett. Ezt a két fájlt megvizsgálva kiderül, hogy hol kellett másik ciklikus permutációt választani.

Mivel a lapokat egyetlen listában adtuk meg, és a listán belül nem tudunk különböző megjelenítési (pl. szín, láthatóság) tulajdonságokat felvenni, ezért a végeredmény listát minden esetben öt különböző listában kellett megadnunk.

Pl a piros és a zöld kockát megadó két parancs csak a végén megadott i,1,6 ill i,7,12 adatban és természetesen a színek, láthatósági feltételek megadásában tér el egymástól:

```
FK_p=Sorozat[Sokszög[Elem[V_D,Elem[F_K,i,1]],Elem[V_D,Elem[F_K,i,2]],
        Elem[V_D, Elem[F_K, i, 3]], Elem[V_D, Elem[F_K, i, 4]]], i, 1, 6]

FK_z=Sorozat[Sokszög[Elem[V_D,Elem[F_K,i,1]],Elem[V_D,Elem[F_K,i,2]],
        Elem[V_D, Elem[F_K, i, 3]], Elem[V_D, Elem[F_K, i, 4]]], i, 7, 13]
```

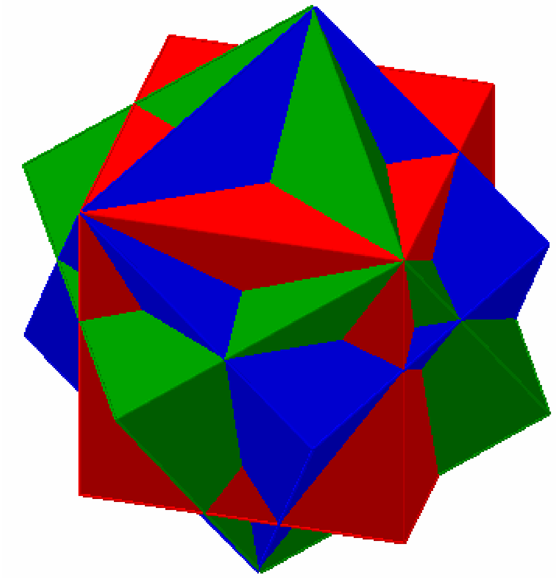
Vajon megadható-e a dodekaéderbe írt öt kocka ennél egyszerűbb formában, rövidebben.

Vegyünk fel egy csúszkával változtatható *m* számot[1], majd az A=(m,-m) és a B=(m,m) pontokat. Ha ezekkel adunk meg egy *(x,y)* síkon álló kockát, akkor annak éppen a *z* tengely

[1] Az előző program ötletét, hogy ti. építsünk be a programba egy saját zoomolási lehetőséget, alkalmazzuk itt is. Pólya György szerint a módszer olyan fogás (ötlet) amit kétszer alkalmaznak.

lesz az egyik forgástengelye. Ez előnyös a megjelenítés szempontjából: k_p=Kocka[A,B] Az áttekinthetőség kedvéért már itt az elején felvettük a megjelenítéshez szükséges jelölőnégyzeteket, ugyanazzal az elnevezéssel, színezéssel élve, mint korábban.

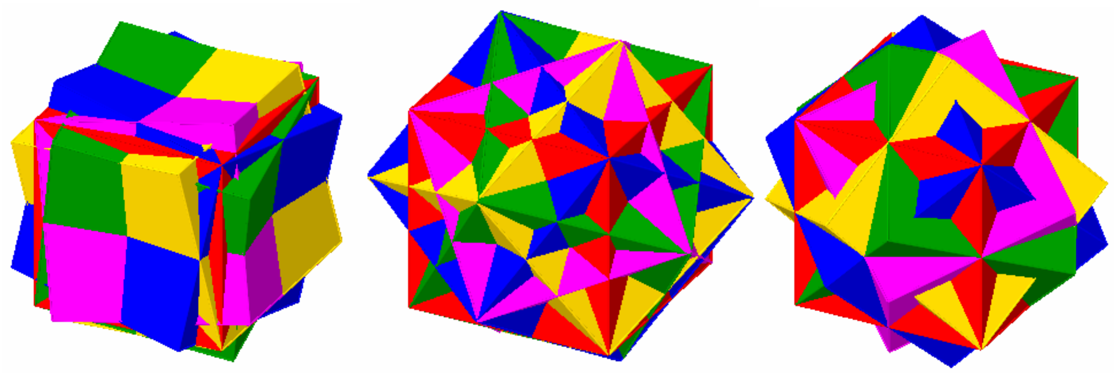
Láttuk, hogy a dodekaéderbe írt kockák közül bármely kettőnek van közös testátlója. Ez azt jelenti, hogy az első (k_p) kockából a négy testátlója körüli forgatással rendre megkapható a további négy kocka. Egyelőre – mondjuk – nem tudjuk ezeknek a forgatásoknak a szögét, ezért felveszünk egy ugyancsak csúszkával mozgatható α szöget. Legyen $0° \leq \alpha \leq 120°$, mivel a testátlója körüli 120°-os forgatás a kockát már önmagába viszi.



Vegyük fel a k_p kocka négy testátlóját, majd forgassuk el ezek körül α szöggel. Ha „találomra" vettük fel a forgatás négy egyenesét, akkor könnyen előfordulhat, hogy a kockák esetleg nem a „jó" irányban fordulnak el. Térbeli forgatás esetén az határozza meg a forgatás irányát, hogy a tengelyt meghatározó két pontot milyen sorrendben vettük fel. Jelen esetben t_z =Egyenes[A, G] t_k=Egyenes[F, D], t_b=Egyenes[C, E] t_s=Egyenes[H, B] a helyes irány. Ha nem így vettük fel a tengelyeket, ez a hiba könnyen javítható.

A forgástengelyek ismeretében rendre fel tudjuk venni a további négy kockát. Pl. a k_z=Forgatás[k_p, α, t_z] paranccsal adtuk meg a zöld kockát.

Innen már csak „ki kellett tapogatni", hogy milyen α érték mellett kapjuk a dodekaéderbe írható öt kockát.

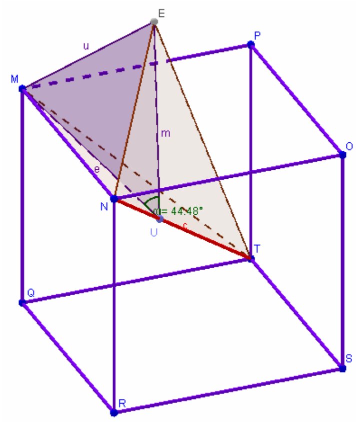


α=15° α=45° α=60°

Öt kocka röviden.ggb

Rövid kísérletezés után **úgy tűnik,** 45°-os forgatással kapjuk meg a dodekaéderbe írt öt kockát.

Valóban? Próbáljuk ellenőrizni a sejtést. Vegyünk át innen egy már elkészített dodekaédert, ebbe rajzoljuk bele a keresett forgatás szögét.



[A kockaforgatás szöge.ggb]

Az itt kapott szög nem 45°-os! Akkor mennyi? Az *UEM* egyenlőszárú háromszög csúcsszögét kell meghatároznunk. Ha a kocka éle egységnyi, akkor e háromszög alapja a dodekaéder éle, azaz $ME = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, szára a kocka csúcsának a rá nem illeszkedő testátlójától mért távolsága: $MU = EU = \frac{\sqrt{6}}{3}$ E két adat elegendő az α szög meghatározásához: $\alpha = \arccos\left(\frac{3\sqrt{5}-1}{8}\right) \approx 44.4775°$ Ez valóban nem 45°! Jó, hogy nem hittünk a szemünknek.

Így az α=arccos((3 sqrt(5)-1)/8) paranccsal valóban a dodekaéderbe írt öt kockát kapjuk.

Amit még megtehetünk a kézbe vehető modell elkészítése érdekében az, hogy előkészítünk egy olyan adat-fájlt, amely alapján bármely címfestő – dekorációs műhely - amelynek van nem csak rajzolásra, hanem vágásra is alkalmas printere, ki tudja vágni a négyzetlapokat. Ezek a gépek általában az **eps** kiterjesztésű vonal-rajzokat elfogadják bemenő adatként. A GeoGebra alkalmas EPS fájlok exportálására. [A kivágható négyzetlap.ggb] fájlban változtatható adat a négyzetlapok mérete, a kivágás szélessége, valamint a négyzetlapok közötti távolság. Azt is be lehet állítani, hogy a klasszikus (Hart-féle) konstrukciót állítsuk-e elő, vagy azt, amelyben három-három négyzetlap az élek felezőpontjában metszi egymást. Ha 9.5 cm-esre vesszük a négyzetet, akkor az egy színhez szükséges hat lap kivágható egy A4-es kartonból. A kivágás szélessége függ a karton vastagságától. Elvileg elegendő a karton vastagságának a 3-szorosa, de célszerű ennél kissé nagyobb szélességet alkalmazni.