2.

Készítsük el a szabályos dodekaéderbe írt öt tetraéder és öt kocka modelljét.

Az öt kocka.

Mint láttuk, a dodekaéder csúcsai közül kiválasztható nyolc olyan, melyek egy kocka csúcsai.

E kocka élei a dodekaéder lapjainak az átlói. Mivel egy szabályos ötszög minden csúcsába két átló fut be, ezért a dodekaéder minden csúcsára két kocka illeszkedik. Így a kocka csúcsai $\frac{20*2}{8}=5$ kockát határoznak meg.

Megtehetjük, hogy a már előállított dodekaédert duplikáljuk öt példányban, és mindegyiken kiválasztunk egy-egy az előzőektől különböző kockát, azokat más-más színnel látjuk el.

Az **5_kocka1.elr** fájl így keletkezett. Az öt kockát és a dodekaédert összesen hat alakzatként ábrázoltuk, az alakzatok melletti pipákat ki-be kapcsolva szabályozhatjuk, hogy melyeket szeretnénk látni. Ezen túlmenően, bármely alakzaton ki-be kapcsolható a lapok és csúcsok láthatósága.

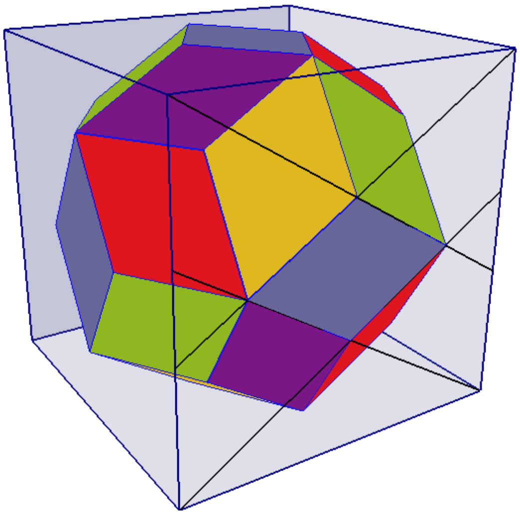
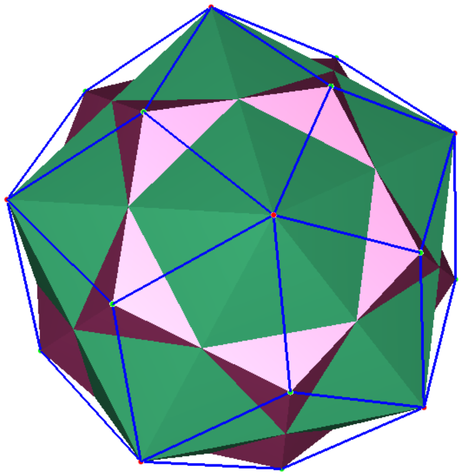
Ezzel a módszerrel olyan projektet kaptunk, amelyben a dodekaéder csúcsainak a koordinátái öt példányban szerepelnek. Az alakzatok összevonhatók egyetlen alakzattá. Ahhoz azonban, hogy később a fóliák felhasználásával válogathassunk, hogy mely kockákat szeretnénk egyszerre látni, az összefésülés előtt adjunk meg minden alakzaton egy-egy fóliát, és ezt a fóliát rendeljük a kocka összes lapjához és éléhez.

Így jutottunk el az **5_kocka2.elr** projekthez, amely már egyetlen alakzatként kezeli az öt kockát. A konstrukció elemzésével több igen érdekes megállapítás birtokába juthatunk. Észrevehetjük például, hogy az egymást metsző kocka-élek metszéspontjai a mindkét kocka élét az aranymetszés arányában osztják két részre. (Ez persze nem meglepő, hiszen egy-egy ilyen él egy dodekaéder lap két átlója, így ez a „jelenség" a szabályos ötszög tulajdonságaiból adódik.

Érdekesebb kérdés, hogy mi lesz az öt kocka(test) közös része? Ezt megvizsgálhatjuk úgy is, hogy „rá közelítve" az öt kockára „belebújunk" a közös részbe. Mi azonban most külön alakzatként is megadtuk az öt kocka közös részét, az un. *rombikus triakontaédert*. (tria = harminc)

Ezt a poliédert harminc egymással egybevágó *aranyrombusz* alkotja. Az aranyrombusz onnan kapta a nevét, hogy átlóinak az aránya az aranymetszés aránya. Így nem véletlen, hogy a már meglévő konstansok ennek az alakzatnak a koordinátái között is jelen vannak. Ezeken túlmenően még egy konstans érték előfordul a csúcsok koordinátáiban, ennek a pontos értéke $2-\tau=2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 0,381966$.

A rombikus triakontaéder tehát olyan alakzat, amelynek kiválasztható 6-6 olyan lapja, melyeknek a síkjai egy kocka lapjainak a síkjai. Itt most az azonos színű lapok alkotnak egy kockát. A rombikus triakontaéder csúcsainak a koordinátáit meghatározhatnánk az öt kocka éleinek (vagyis a dodekaéder lapjait alkotó ötszög átlóinak) a metszéspontjait összekötő szakaszok metszéspontjaiként is, azonban később erre lesz ennél lényegesen egyszerűbb módszerünk is, kihasználva, hogy e poliédernek bizonyos csúcsai dodekaédert, a többiek ikozaédert határoznak meg.

Korábban láttuk, hogy a kocka csúcsai közül kiválasztható (kétszer) négy, amely szabályos tetraédert alkot. Így a dodekaéder csúcsai 5*2=10 tetraédert határoznak meg. Ezek közül minden dodekaéder csúcsra két tetraéder csúcsa illeszkedik. A 10 tetraéder szétválasztható két olyan 5-ös csoportra, hogy a csoporton belül minden dodekaéder csúcs csak egy-egy tetraédernek legyen a csúcsa. Így kapunk egy „jobbos" és egy „balos" öt tetraéderből álló alakzatot. 5_tetraéder.elr