

# Az elemi- és felsőbb matematika határán

**EPSZTI**

regionális matematika tanári szakmai nap

Szeged

2017. 09. 25.

Dr. Németh József  
SZTE, TTIK, Bolyai Intézet

50. tanévem az SZTE-n

Elemi matematika és felsőbb matematika határán (tanárképzésnél ez fontos; "kilincs").

Kiindulás: Riesz Frigyes; 1925 Rektori székfoglaló; "Elemi módszerek a felsőbb matematikában" (Elnézést kér...)

A **SKATULYAELV**-re épített ("a matematikusok között népszerű ötlet, amely számos probléma nyitjához vezetett és érdemei elismeréséül az **elv** rangját és méltóságát nyerte el.").

(4 szoba; párizsi nők; hajszálak  $\leq 300.000$ : 70e - 100-120e - 120-150e, a lakosság 2.105.000).

Riesz: Dirichlet a sixtuszi kápolnában a húsvéti zene hallgatása közben jött rá a SZÁMELMÉLET egyik fontos tételére:  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, n\alpha$  között  $\exists$  legalább egy, amelynek a legközelebbi egésztől vett eltérése  $\leq \frac{1}{n}$ .

Azaz  $|q\alpha - p| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \leq \frac{1}{q \cdot n} \leq \frac{1}{q^2}$  (Riesz ezt belátja a székfoglalón).

Én a mai előadást erre építem.

A **gyökér**: a Dirichlet-féle skatulyaelv (pigeon-hole principle; postai boxok)

**1. Tétel.** Ha  $\alpha$  irracionális szám, akkor  $\exists \frac{p_n}{q_n}$  ( $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ ), hogy

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

**Bizonyítás.** Legyen  $n$  fix,  $n \in \mathbb{N}$  és tekintsük a következő  $(n + 1)$  darab valós számot.

$$(*) \quad 0, \alpha - [\alpha], 2\alpha - [2\alpha], \dots, n\alpha - [n\alpha];$$

ezek mind beleesnek a  $[0, 1)$  intervallumba. Mivel a

$$(**) \quad \left[ \frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

lefedti a  $[0, 1)$ -et, ezért kell lenni legalább két olyan pontnak (skatulyaelv) a  $(*)$  pontok közül, mondjuk

$$n_1\alpha - [n_1\alpha] \text{ és } n_2\alpha - [n_2\alpha] \quad (0 \leq n_1 < n_2 \leq n),$$

amelyek egy intervallumba esnek a  $(**)$  intervallumok közül (u.i.  $(*)$   $(n + 1)$  pontot tartalmaz,  $(**)$  pedig  $n$  db intervallumot).

Így

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - (n_1\alpha - [n_1\alpha])| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$\left| \underbrace{(n_2 - n_1)}_{q_n} \alpha - \underbrace{([n_2 \alpha] - [n_1 \alpha])}_{p_n} \right| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$|\alpha \cdot q_n - p_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{q_n} \Rightarrow \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

(Ha  $n^*$  olyan, hogy az előbb kapott  $|q_n \cdot \alpha - p_n| > \frac{1}{n^*}$ ,

akkor újabb  $\frac{p_n^*}{q_n^*}$  adódik úgy, hogy  $|\alpha q_n^* - p_n^*| < \frac{1}{n^*}$ ,

így újabb  $\frac{p_n}{q_n}$ -t kapunk, azaz végtelen sok ilyen tört adódik.

**Megjegyzés:**  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{c \cdot q^2}$ ;  $c = \sqrt{5}$  a legjobb

(Hurwitz).

Továbbá  $q^2 \rightarrow q^{2+\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ),  $\forall$  alg. irracionális esetén csak véges sok ilyen  $p/q$  van.

**2. Elemi probléma:**  $\{\cos n\}$  sorozat "viselkedése"

Az  $y = \cos x$  grafikonja alapján:  $\cos n$  végtelen sok  $n$ -re pozitív és végtelen sok  $n$ -re negatív, tehát (monotonitás kizárva; konvergencia?  $a_n \rightarrow a$  mit jelent?)  $\cos n \not\rightarrow a$  ( $a \neq 0$ )

$$\text{Tfh } \cos n \rightarrow 0, \text{ de } \cos^2 n = \frac{1 + \cos 2n}{2} \Rightarrow 0 = \frac{1 + 0}{2}$$

adódna, ami ellentmondás.

(Megjegyzés: integrálás; lineáris fgv.-transzformáció)

**Kérdés:** a  $\{\cos n\}$  sorozat viselkedése (korlátos; B.-W.) (Mik a torlódási pontok?)

$\stackrel{?}{\exists} n_k: n_1, n_2, \dots, n_k \dots$  úgy, hogy  $\cos n_k \rightarrow 0$ .

Pl.:  $n_k \stackrel{?}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos n_k \rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$ , de  $n_k$  és  $\frac{\pi}{2}$  távolsága  $\geq 0,4 \dots$

Viszont tudjuk:  $\left| 2\pi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow |2\pi q_n - p_n| <$

$\frac{1}{q_n}$ , azaz  $|2\pi q_n - p_n|$  b.milyen kicsi lehet, így ezt

felmérjük 0-tól,  $\frac{\pi}{2}$ -et tetszőlegesen meg tudjuk köze-

líteni és így ha  $2\pi \hat{q}_n - \hat{p}_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , akkor

$$\underbrace{\cos(2\pi\hat{q}_n - \hat{p}_n)}_{\cos(-\hat{p}_n)} \rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$\cos |\hat{p}_n| \rightarrow 0$ , azaz  $|\hat{p}_n|$  kívánt részsorozat.

Így megmutathatjuk, hogy  $\exists n'_k: \cos n'_k \rightarrow 1$ ,

$\exists n''_k: \cos n''_k \rightarrow -1$ ,  $\exists n'''_k: \cos n'''_k \rightarrow \frac{1}{3} \dots$

**TÉTEL.** Legyen  $\alpha$  egy irracionális szám, ekkor az  $A = \{m + n\alpha: m, n \in \mathbb{Z}\}$  halmaz mindenütt sűrű  $\mathbb{R}$ -ben, azaz minden intervallum tartalmaz legalább egy elemet  $A$ -ból. (De akkor minden intervallum végtelen sok elemet is tartalmaz  $A$ -ból.)

**Bizonyítás.** Legyen  $(a, b)$  tetszőleges intervallum, megmutatjuk, hogy legalább egy eleme  $A$ -nak beleesik ebbe az intervallumba. Legyen  $0 < \varepsilon = b - a$ . Ismert, hogy  $\exists p_n, q_n$  úgy, hogy

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2},$$

és mivel  $q_n \rightarrow \infty$ , ezért

$$|\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{q_n} < \varepsilon$$

fennáll m.m.  $n$ -re. Vegyük  $c \stackrel{\text{def}}{=} |q_n \cdot \alpha - p_n|$ , ahol  $p_n, q_n$  a fenti tulajdonságú.

Ekkor viszont van legalább egy  $m$  (egész szám) úgy, hogy  $m \cdot c$  az  $(a, b)$  intervallumba esik. (Részeg)

Azaz  $m \cdot q_n \alpha - m \cdot p_n$  vagy  $-m \cdot q_n \alpha + m \cdot p_n$  az  $(a, b)$ -be esik.

**3. TÉTEL.** A  $\{\cos n: n \in \mathbb{N}\}$  halmaz sűrű a  $[-1; 1]$ -ben.

(Azaz a  $[-1; 1]$  minden  $t$  pontja a  $\{\cos n\}$  sorozat torlódási pontja, azaz  $t$  bármely környezetében benne van a sorozat végtelen sok tagja, vagy  $\exists\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  természetes számok növény sorozata úgy, hogy  $\cos n_k \rightarrow t$ .)

**Bizonyítás.** Legyen  $t \in [-1; 1]$ . Akkor  $\exists x: t = \cos x$ . Miért? Az előző tétel szerint  $\exists\{m_n\}$  és  $\{k_n\}$  egész számok sorozata úgy, hogy  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (k_n 2\pi + m_n)$ ; ebből viszont a cosinus fgv. folytonosságából adódik:

$$\begin{aligned} t = \cos x &= \cos\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (k_n 2\pi + m_n)\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(k_n 2\pi + m_n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos |m_n|. \end{aligned}$$

Így adódott, hogy a  $[-1; 1]$  int. minden pontja torlódási pontja a  $\{\cos n\}$  sorozatnak. (sin  $n$  hasonló)

Nyilván nem vesz fel minden  $t \in [-1; 1]$  értéket, csak "tetszőlegesen közel kerülnek" a sorozat elemei. Pl.

$\exists n$ , hogy  $\cos n = \frac{1}{3}$ . Miért?

**Kérdés:**  $\cos n$  racionális vagy irracionális?

$\cos n, \sin n$ , racionális, irracionális?

1) Ha  $r \neq 0$  rac., akkor  $\cos r$  irracionális. (Hermite 1873; "elemi" bizonyítás)

$\Rightarrow \sin r, \operatorname{tg} r$  irracionális

$$\cos 2r = \cos^2 r - \sin^2 r = 1 - 2 \sin^2 r$$

$$\cos 2r = \cos^2 r - \sin^2 r = \frac{\cos^2 r - \sin^2 r}{\cos^2 r + \sin^2 r} =$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 r}{1 + \operatorname{tg}^2 r}.$$

2) Ha  $r \neq 0$  rac., akkor  $\cos r, \sin r, \operatorname{tg} r$  **TRANSZCENDENS** (Lindemann 1883) (Baker 1975)  
(v.ö.  $\pi; e$ )

**4. Probléma:** Konvergens-e a  $\frac{\operatorname{tg} n}{n}$  sorozat?

(Előzmény:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log_e \sqrt[3]{2} +$

$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}; \sum_1^\infty \frac{\sin n}{n}; \sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{tg} n}{n}$  konv.-e?)



Állítjuk, hogy nem, hiszen  $\frac{\operatorname{tg} n}{n}$  divergens. Először megmutatjuk, hogy ha  $\frac{\operatorname{tg} n}{n}$  konvergens lenne, akkor csak 0-hoz tarthatna, ugyanis  $n_k = [k\pi]$  esetén  $|n_k - k\pi| < 1 < \frac{\pi}{3}$ , így  $\left| \frac{\operatorname{tg} n_k}{n_k} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{n_k} \rightarrow 0$ , ha  $k \rightarrow \infty$ .

**Segédteétel.** Legyen  $\alpha$  irracionális szám. Ekkor létezik végtelen sok  $p, q$  egész szám úgy, hogy

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Most térjünk rá az eredeti állítás bizonyítására, azaz, hogy  $\frac{\operatorname{tg} n}{n}$  divergens.

Legyen  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $q$ -t pedig vegyünk 1-nél nagyobb páratlan számnak úgy, hogy fennáljon, hogy

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{1}{q^2}, \quad \text{azaz} \quad \left| p - q \cdot \frac{\pi}{2} \right| < \frac{1}{q} < \frac{\pi}{4}.$$

Mivel  $q$  páratlan, a  $\operatorname{ctg}$  függvény differenciálható a

$$\left[ q\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}; \quad q\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \text{ intervallumon.}$$

Így a Lagrange-féle középérték-tétel szerint

$$\exists z \text{ a } p \text{ és } q\frac{\pi}{2} \text{ között úgy, hogy}$$

$$(*) \quad |\operatorname{ctg} p| = \left| \operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q\frac{\pi}{2} \right| = \left| p - q\frac{\pi}{2} \right| \frac{1}{\sin^2 z}.$$

Mivel  $\frac{1}{\sin^2 z} \leq 2$ , így  $(*)$ -ből kapjuk, hogy

$$|\operatorname{ctg} p| \leq 2 \left| p - q\frac{\pi}{2} \right| \Rightarrow |\operatorname{tg} p| \geq \frac{1}{2 \left| p - q\frac{\pi}{2} \right|} \geq \frac{q}{2} \geq \frac{p}{4}$$

végtelen sok  $p$ -re

$$\left| \frac{\operatorname{tg} p}{p} \right| \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} n}{n} \not\rightarrow 0.$$

*Megjegyzés:*  $\frac{\operatorname{tg} n}{n^2}, \dots, \frac{\operatorname{tg} n}{n^7}?, \frac{\operatorname{tg} n}{n^8} \rightarrow 0$  (rövid, fél oldalas bizonyítás - erről később)

Részeredmény:  $\frac{|\operatorname{tg} n|}{n^2} \leq \frac{11 \cdot 000 \cdot 000}{n}$ , ha  $n \leq 10^{8\,000\,000}$  (u.a. cikk).

Math. Magazine (Vol. 72, No. 5, Dec, 1999), IRA  
Rosenholtz

**TÉTEL.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} n}{n^8} = 0$

**Gondolatok a bizonyításhoz:**

**K. Mahler** 1953-ban [On the appr. of  $\pi$ , Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 56(1953), 30-42] megmutatta:

$$|\pi - p/q| > \frac{1}{q^{42}}, \quad \forall q \geq 2\text{-re, minden } p \text{ esetén;}$$

és ugyanakkor

$$|\pi - p/q| > \frac{1}{q^{30}},$$

ha  $q$  elég nagy (minden  $p$ -re).

**M. Mignotte** 1974-ben javította 30-at 20-ra [Bull. Soc. Math. France Mem., 37(1974), 121-132]

⋮

**M. Hata** 1993-ban ezt az "irrationality measure"-t 8,02- re javította [Acta Arithmetica, 63(1993), 335-349], azaz  $\exists Q$ , hogy ha  $q > Q$ , akkor

$$(*) \quad \left| \pi - p/q \right| > \frac{1}{q^{8,02}} \text{ minden } p\text{-re.}$$

A 8,02 miatt adódik a  $\frac{\operatorname{tg} n}{n^8} \rightarrow 0$ . (\*)-t és a Lagrange-féle k.é.tétel - és kész (ld. az előbb említett cikk).

**Tétel:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} n}{n^8} = 0$

**Bizonyítás.** Hata eredményéből következik, hogy van olyan  $Q$ , hogy ha  $q \geq Q$  és  $r$  tetszőleges egész, akkor  $\left| \pi - \frac{r}{q} \right| > \frac{1}{q^{8,02}}$ . Speciálisan  $r = 2p$ -re az áll, hogy  $\left| \pi - \frac{2p}{q} \right| > \frac{1}{q^{8,02}}$ . Ebből adódik, hogy

$$\left| q \cdot \frac{\pi}{2} - p \right| > \frac{1}{2 \cdot q^{7,02}}.$$

Legyen  $p$  pozitív egész és  $q$  olyan pozitív egész, hogy fennálljon

$$\left| p - q \cdot \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Feltehetjük, hogy  $q$  "elegendően nagy". Ha  $q$  páros, akkor  $|\operatorname{tg} p| < 1$ , így  $\frac{|\operatorname{tg} p|}{p^8} < \frac{1}{p^8}$ , ami "nagyon kicsi". Ha  $q$  páratlan, akkor - alkalmazva a Lagrange-féle középértéktételt - hasonlóan, mint előbb, azt kapjuk, hogy

$$|\operatorname{ctg} p| = \left| \operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q \cdot \frac{\pi}{2} \right| = \left| p - q \cdot \frac{\pi}{2} \right| \cdot \left| \frac{1}{\sin^2 c} \right| \geq 1 \cdot \left| p - q \cdot \frac{\pi}{2} \right|,$$

amiből

$$|\operatorname{tg} p| \leq \frac{1}{\left| p - q \cdot \frac{\pi}{2} \right|} < 2 \cdot q^{7,02}.$$

Így, mivel  $\left| p - q \cdot \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{4}$ -ből  $q \leq p$  adódik, azt kapjuk, hogy  $\frac{|\operatorname{tg} p|}{p^8} \leq 2 \cdot p^{-0,08}$ , tehát  $\frac{\operatorname{tg} p}{p^8}$  "kicsi".

Tehát  $\frac{\operatorname{tg} n}{n^8} \rightarrow 0$ .

**V. Kh Salikov** 2008-ban [On the irrationality Measure of  $\pi$ , Russ. Math. Surv., 63(2008), 570-572]  
 Irrationality measure:  $\mu(\pi) \leq 7,6063$ ; azaz

$$|\pi - p/q| \geq \frac{1}{q^{7,6063}}, \text{ véges sok } \frac{p}{q} \text{ kivételével.}$$

Így ebből  $\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} n}{n^7} \rightarrow 0$  (!) (ld. előbb 8,02 helyett 7,6063).

Végül:

**Max. A. Alexeev** 2011-ben belátta, hogy ha az ú.n. Flint Hills sequence  $\left( \frac{1}{n^3(\sin n)^2} \right)$  konv., akkor  $\mu(\pi) \leq 2,5$  lenne, azaz  $|\pi - p/q| \geq \frac{1}{q^{2,5}}$  teljesülne m.m.  $p/q$ -ra.

Ha ez teljesülne, akkor  $\frac{\operatorname{tg} n}{n^2} \rightarrow 0$  biz.ható.

**Megjegyzés:** (Inter. Journal of Math. Analysis Vol. 10, 2016, no. 12, 573-577.

”On the Convergence of Some Special Series” (M.A. Chakhkiev, M.A. Ziroyan, N.P. Tretyakov)

A Flint Hills sor általánosabb eseteivel foglalkoznak (3 és 2 helyett más paraméterekkel, sőt fgv.sorral, azonban az eredeti esetre nincs konklúzió)

2016!!

**Tétel** (Alexeev) *Ha  $\mu(\pi) > 1 + \frac{u}{v}$ , akkor  $\frac{1}{n^u |\sin n|^v}$  divergens ( $u, v \in \mathbb{R}^+$ )*

*Következmény. Ha  $\frac{1}{n^3 |\sin n|^2}$  konvergens, akkor*

*$\mu(\pi) \leq 1 + \frac{3}{2}$  ( $= 2, 5$ ); és akkor  $\frac{\operatorname{tg} n}{n^2} \rightarrow 0$  belátható.*

**Bizonyítás.** Ha  $\mu(\pi) > 1 + \frac{u}{v}$ , akkor  $k = 1 + \frac{u}{v}$  esetén az

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}$$

végtelen sok  $p, q$ -ra fennáll.

Azaz  $\exists \{p_i\}$  és  $\{q_i\}$  úgy, hogy

$$|p_i - \pi q_i| < \frac{1}{q_i^{k-1}}.$$

Ekkor viszont *egyrészt*

$$|\sin(p_i)| = |\sin(p_i - q_i \pi)| \leq |p_i - q_i \pi| < \frac{1}{q_i^{k-1}} < C \frac{1}{p_i^{k-1}}$$

fennáll valamilyen  $C > 0$  számra (ami  $k$ -től függ).  
 Így, ha  $n = p_i$ , akkor

$$\frac{1}{|\sin n|^v} > C^{-v} n^{(k-1)v}, \quad \text{majd}$$

$$\frac{1}{n^u |\sin n|^v} > C^{-v} n^{(k-1)v} \cdot n^{-u} = C^{-v}$$

$$\text{hiszen } (k-1)v - u = 0$$

*Másrészt*

$$|\sin(1 + p_i)| = |\sin(1 + p_i - q_i\pi)| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sin 1,$$

ahonnan

$$\frac{1}{(1 + p_i)^u |\sin(1 + p_i)|^v} \rightarrow 0.$$

Így valóban divergens a kívánt sorozat.