Matematika egy csekély értelmű medvebocs szemével:

Egy rendhagyó fizikaóra az Atomki Fizikusnapok programjában

Sulik Béla

MTA Atommagkutató Intézet

(alapító: Szalay Sándor)

Debrecen

EPSZTI Regionális matematika tanári szakmai nap,
Nyíregyházi Evangélikus Kossuth Lajos Gimnázium, 2018 március 19-én

Motiváció

Mindig féltem a matektól. „Sikeres” voltam, de nem éreztem biztonságot.

Ez a technikumban némileg oldódott (egyszerű anyag rengeteg gyakorlással – és **unalommal**)

Egyetemen nem féltem, de nem is szerettem igazán.

Láttam, látom, hogy sokan még és egyre jobban félnek.

Szinte mindenütt.

- PhD diákok - nemcsak magyarok
- Korrepetálás - a logaritmust nem Isten teremtette
- Saját gyermekeim - hajítógép, nyitott mondat, függvényfogalom bevezetése ****
- Egy tutori tapasztalat - ez adta a lökést a mai témához

Mi a függvény (Sulinet, 9. oszt.)?
Lehet, hogy ez pontos, de sokaknak emészthetetlen. Nem lehetne gyakorlati példák **után** általánosítani?

1. *példa:*

a) Van 30 forintunk, és 6 forintos borítékot szándékozunk vásárolni. Legalább egyet, legfeljebb ötöt. A darabszám változhat.

Ezt a változó darabszámot jelöljük *x*-szel. Az elmondottakból következik: $x \in \{1;2;3;4;5;\}$. Azt az összeget, amelyet fizetnünk kell, 6*x* határozza meg. Nyilvánvaló, $6x \in \{6;12;18;24;30;\}$. Az *x* bármely szóba jövő értéke meghatározza a fizetendő összeget, azaz 6*x* lehetséges értékei közül az egyetlen megfelelőt.

A példából a lényeget kiemeljük és kissé kiegészítjük:

Adott egy halmaz, a változó lehetséges értékeinek a halmaza. Ez a példánknál: *H* = {1; 2; 3; 4; 5}.

Ezt a halmazt, vagyis *a változó lehetséges értékeinek a halmazát* **a függvény értelmezési tartományának** *nevezzük.*

Adott a **hozzárendelési szabály (utasítás),** amely megmondja, hogy a változó lehetséges értékeihez milyen függvényértékek tartoznak.

(Példánkban ez: 6*x*.) Szokásos jelöléssel: $x \to 6x$ (olvasd: „*x*-hez rendeljük a 6*x*-et”), f(x)=6x .

Mi a függvény - 2 (Sulinet, 9. oszt.)?

Függvényérték, helyettesítési érték

2. *példa:* 160 Ft-unk van, és vásárolni akarunk 5 darab 2 forintos borítékot és 6 forintos borítékokból valamennyit (esetleg egyet sem).

A fizetendő összeg g függvénye:

$g: D_g \to R_g$, $x \to 6x + 10$, ahol $D_g = \{x | 0 \le x \le 25,\ x \in N\}$.

Az R_g értékkészlet elemei természetes számok, így használhatjuk a számhalmazokra bevezetett jelölést:

$g: D_g \to N,\ \ x \to 6x + 10$.

A függvény változója helyére behelyettesíthetjük az értelmezési tartomány bármely elemét. Például, az előző *f* függvénynél $x = 2$-höz a $6 \cdot 2 = 10$ *függvényérték* tartozik. Ezt a *f* függvény $x = 2$-**höz tartozó helyettesítési értékének** nevezzük, röviden így jelöljük: $f(2) = 12$.

Az *f* függvény *x* helyen vett helyettesítési értéke $f(x)$.

Az előző *g* függvény néhány helyettesítési értéke: $g(5) = 40$, $g(7) = 52$, $g(11) = 76$ stb.

Egy kis kitérő

„Nun warten Sie doch erst mal die Mathe-Reform ab"

Es gipt keine Katofeln mer

ws. Hamburg

Nach der Mengenlehre nun die Rechtschreibreform: Das macht den Deutschen keiner nach. An deutschen Schulen kursiert dazu ein Handzettel über „Mathe und Rechtschreibung im Wandel der Zeit":

Volksschule 1960: „Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 50 Mark. Die Erzeugerkosten betragen 40 Mark. Berechne den Gewinn!"

Realschule 1970: „Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 50 Mark. Die Erzeugerkosten betragen vier Fünftel des Erlöses. Wie hoch ist der Gewinn?"

Gymnasium 1980: „Ein Agrarökonom verkauft eine Menge subterraner Feldfrüchte für eine Menge Geld (G). G hat die Mächtigkeit 50. Für die Elemente aus G gilt: G ist 1. Die Menge der Herstellungskosten (H) ist um zehn Elemente geringer als die Menge G. Zeichnen Sie das Bild der Menge H als die Teilmenge der Menge um G und geben Sie die Lösungsmenge (L) für die Frage an: Wie mächtig ist die Gewinnsumme?"

Gesamtschule 1990: „Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 50 Mark. Die Erzeugerkosten betragen 40 Mark und der Gewinn 10 Mark. Unterstreiche das Wort ‚Kartoffel' und diskutiere mit deinem Nachbarn darüber!"

Schule 2000 (nach Einführung der Rechtschreibreform): „Ein kapitalistisch priwelegirter bauer bereichert sich an einem sack kartoffeln um 10 euros. Untersuch das tekst auf inhaltliche feler, korigiere das aufgabengestaltung unt demonstrire gegen die lösunk."

Schule 2010: „es gipt keine katofeln mer."

WELT am SONNTAG, 20350 Hamburg, Redaktion: Brieffach 2510
Telefon: 040/347 00
Anzeigen: 040/347 24 380
Vertrieb/Leserservice:
0180/23 23 475

A <u>matek és a helyesírás</u> fejlődése; a német iskolákban közkézen forgó szöveg a kilencvenes években (Welt am Sonntag)

Népiskola, 1960: Egy gazda 50 márkáért ad el egy zsák krumplit, melynek előállítása 40 márkába került. Számold ki a hasznát!

Reáliskola, 1970: Egy gazda 50 márkáért ad el egy zsák krumplit, melynek előállítása az ár 4/5-ébe került. Mennyi a haszon?

Gimnázium, 1980: Egy agrárgazdálkodó föld alatt termett mezei gyümölcsök halmazát értékesítette, egy P halmaz pénzért. A P halmaz számossága 50. A P halmaz p elemeire fennáll a p=1 egyenlőség. Az előállítási költségek K halmaza tízzel kevesebb elemet tartalmaz, mint a P halmaz. Ábrázold a K halmazt, mint a P halmaz részhalmazát, és határozd meg az alábbi kérdésnek megfelelő megoldási halmazt (M): Mennyi a nyereség számossága?

Egyesített, 8 osztályos általános iskola, 1990: Egy gazda 50 márkáért ad el egy zsák krumplit, melynek előállítása 40 márkába került. A haszna 10 márka. Húzd alá a krumpli szót, majd beszéld meg a feladatot a padtársaddal!

Egy iskola a helyesírási reform után, 2000: Egy priwilegizált hejzetű kapitalista paraszt egy zsák krumply el adásával 10 Euróval gazdagodikk. Keresd meg a szövekben a tartalmi hibákat, korigáld a feledat felépítését, éss mutasd be a megoldást!

Egy iskola, 2010: Nincs már töb krunpli.

Másik kitérő: Érdekességek a hatványok világában

- 1 mól anyag hossza, ha egyetlen atomláncból áll

$6x10^{23}$ atom x 10^{-10} m = 6 x 10^{13} m = 6 x 10^{10} km

A fény ezt 2 x 10^{5} s ≈ 3 nap alatt teszi meg.

- Hosszú-e egy másodperc?

Az Univerzum kora $60x60x24x365x13{,}5x10^{9}$ s ≈ $4x10^{18}$ s

1C töltésben $6{,}25x10^{18}$ elektron van!

- Milyen pontos egy mérés?

Ha 10 értékes jegyre mérünk, a Debrecen – Budapest távolság pontossága 0,022 mikron. Látni lehet, hogy ennek nincs értelme,

Egy ház, szobor, vagy kilométerkő ennél sokkal nagyobb.

A rendhagyó óra első diája:

Havazik

e története

matematikai kísérletek

rendhagyó fizikaóra, ATOMKI, Debrecen, 2017 november

Sulik Béla

(Válaszok olyan kérdésekre, melyekre az induláskor magam sem tudtam a választ)

Differenciálegyenlet ?

- Elég misztikusan hangzik.
- A középiskolai matematika törzsanyaga még a differenciálást sem tartalmazza. (?)
- Persze a középiskolás anyagban is vannak differenciálegyenletek.
- Pl. Newton második törvénye: $F = m\,a$
- Ha a test csak az x tengely mentén mozoghat:

$F_x = m\,a_x$

$x(t) = ?$

$$a_x \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad v_x \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad a_x \approx \frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t}$$

Csak a megoldását tanuljuk állandó *F* esetére:

$$v_x = v_{x0} + a_x t \qquad x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Erre még visszatérünk. De a világ tele van ilyen egyszerű☺ összefüggésekkel. Nézzünk most egy másikat!

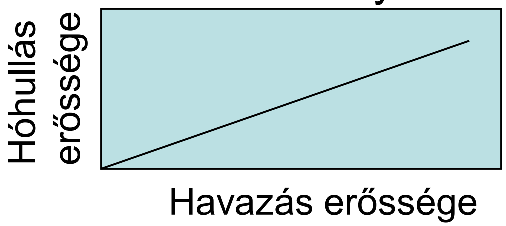
Minél inkább havazik….

Minél inkább havazik,
Annál inkább hull a hó →

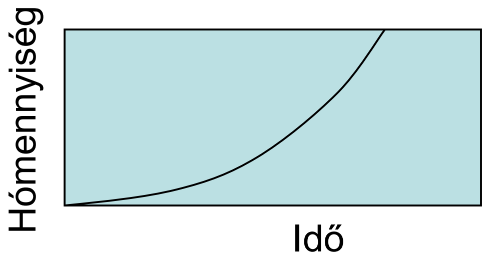
Minél inkább hull a hó
Annál inkább havazik, →

Minél inkább havazik,
Annál inkább hull a hó →

Hóm törvény



Hull a hó és (a) hózik,
Micimackó fázik.
(vagy *hahózik)*



Lineáris összefüggések:

I = (1/R) U

p = (ρ g) h

…..

A nemlineáris világ egyik legegyszerűbb esete.

Miről van szó?

*Valami annál gyorsabban **növekszik** ----- minél nagyobb*
És annál nagyobb lesz, minél gyorsabban növekszik.

Egy történet – sok alakban

Baktériumok szaporodása (természet)
Kamatos kamat
A sakktábla búzaszemei
Robbanás

Víztartály kiürülése
Kondenzátor kisülése
Radioaktív bomlás
A légnyomás magasságfüggése

Valami annál gyorsabban ***növekszik*** *----- minél nagyobb*

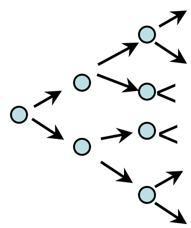
Valami annál gyorsabban ***csökken*** *----- minél nagyobb*

Közös pont:

Egy mennyiség ***<u>változásának sebessége</u>*** *a* ***<u>nagyságával</u>*** *arányos*

Mintha a jól ismert ***mértani sorozatokról*** lenne itt szó…

A baktérumok száma egy tenyészetben kb. 20 percenként megduplázódik



$a_1=1$

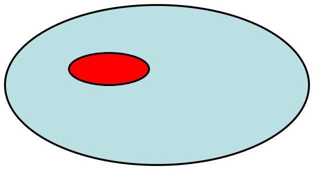
$q=2$

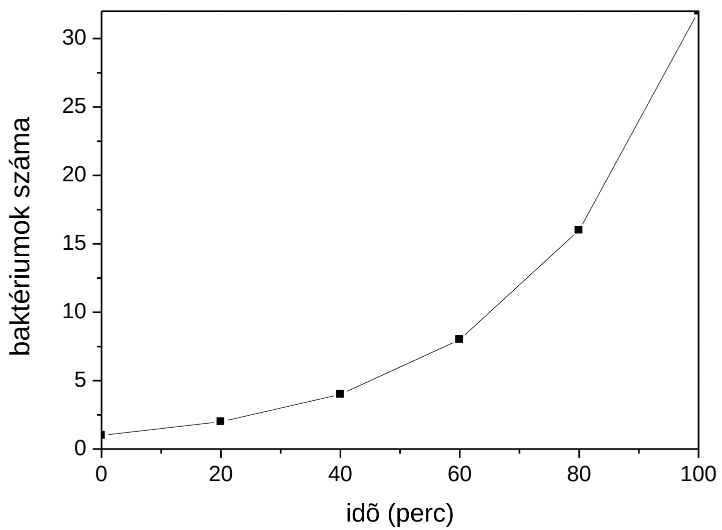
$a_n = a_1\, q^{n-1}$

$S_n = a_1\,(q^n-1) / (q-1)$

Eredmény (1 nap múlva):

(Végül megáll: a tápanyag már nem jut el ahová kell)





Ez szörnyű ütemű növekedés:

A láthatatlanul piciből centiméteres folt nőtt

Hogy mégis mekkora növekedés?

A sakkjáték (sah-játék) legendája:

- A sakk feltalálóját a sah meg kívánta jutalmazni.
- A feltaláló csak annyit kért: tegyenek az első kockára egy szem búzát, a másodikra kettőt, a harmadikra megint a dupláját, és így tovább.
- Egy szem búza tömege ~40 mg.
- A kockák száma 8x8=64.
- A mértani sorozat összege: $(2^{64}-1) / (2-1) =$ **1,84 10^{19} búzaszem**
- Ez **736 milliárd tonna**
- Magyarország éves termelése 4 millió tonna
- A világé is: < 30 milliárd tonna

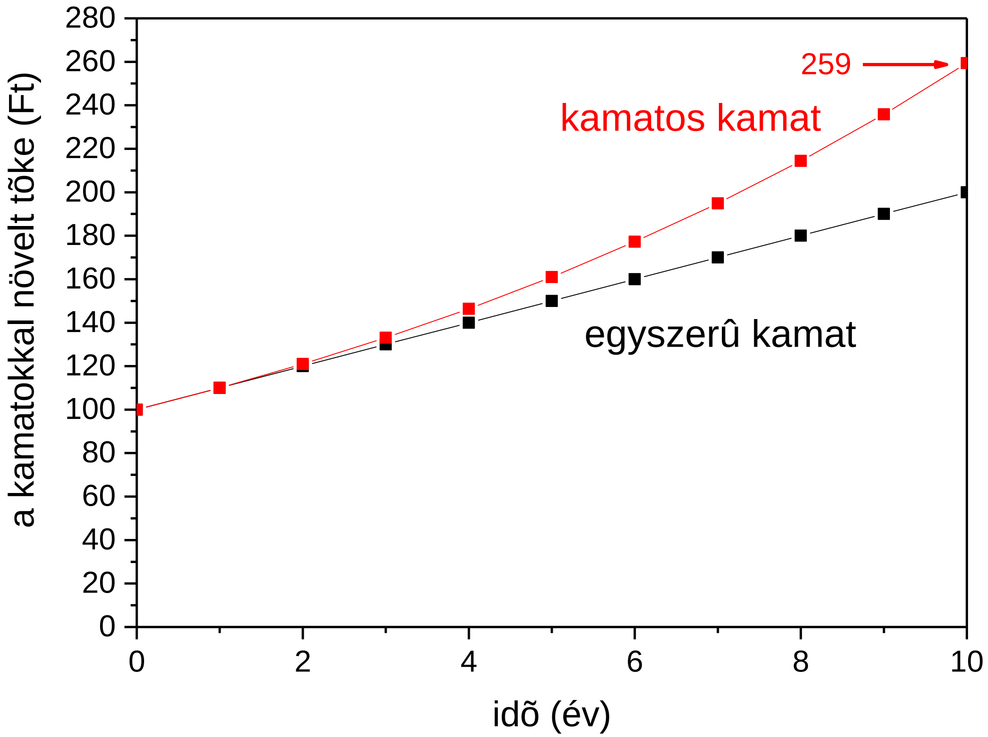
- Következtetés:
- **Egy mackó éneke jégkorszakot válthat ki**.

(Persze csak ha van a felhőben elég hó)

Egy „szelídebb” példa:

(attól függ persze, hogy kölcsön, vagy hitel)

- **Kamatos kamat**
- Tőke:100 Ft
- Kamat: 10%
- Futamidő: 10 év
- $a_1 = 100$
- $q = 1,1$



..de nem mindig elég a mértani sorozat

Például Micimackó rettenetes hóesésére is nehéz lenne alkalmazni.

De a robbanás is hasonló folyamat.

Egy kémiai átalakulásban felszabaduló energia a környezetében újabb átalakulásokat indít el.
Lökéshullám *indul.*

Ez hasonlít az előbbi példákhoz, mégis más.
És nemcsak azért, mert nagyon gyors.

Nem lehet benne *lépéseket* megkülönböztetni.

Bár egyes molekulák átalakulásából áll,

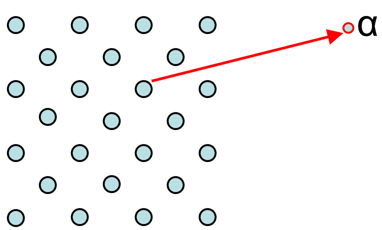
mégis gyakorlatilag folyamatosan történik

Mértani sorozattal már nem lehet leírni.

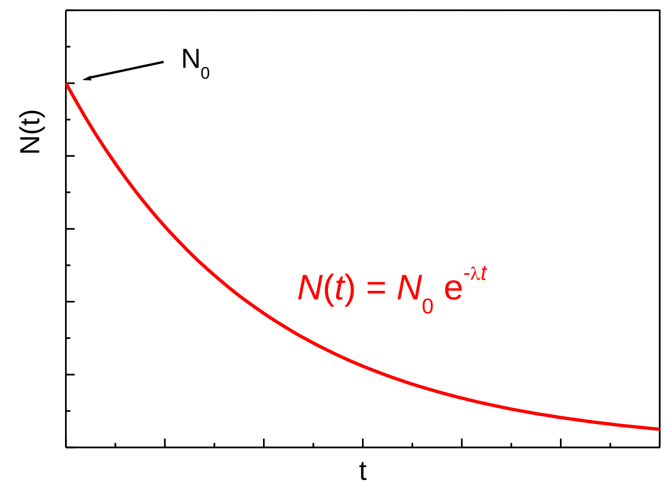
Amikor **csökken** a vizsgált mennyiség

Radioaktív bomlás: Van ***N*** darab (nagyon sok) atommagunk.

Tudjuk, hogy pl. 10^6 magból átlagosan 1 bomlik el percenként.
Ez **véletlenszerűen** történik**.**



A még el nem bomlott magok száma:



Bevezetjük hát a $\boldsymbol{\lambda}$ bomlási állandót
(értéke csak a mag belső tulajdonságaitól függ):

$\boldsymbol{\lambda} = 10^{-6}$ bomlás / mag / perc

A percenkénti bomlások száma **mérhető mennyiség**!

Várható értéke, ***n*** pedig egyszerűen számolható:

$n = \lambda N = 10^{-6} N$

Kérdés:

Ha $t=0$ időpontban N_0 darab magunk van,
hogyan függ ***n*** az időtől? És ***N*** ?

Válasz:

$n = N_0\, \lambda\, e^{-\lambda t}$ azaz $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$

Mi ez? Ismerjük **e** értékét, ki tudjuk ***n***-et számolni, **de nem igazán értjük.**

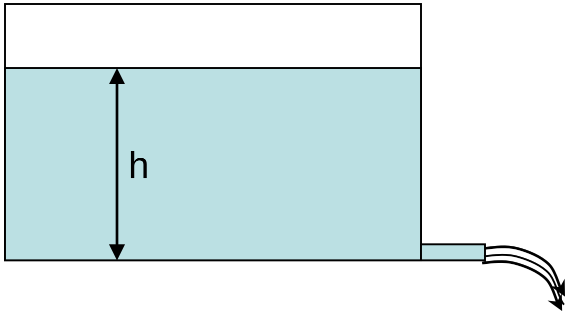
$$N(t) = N_0\, 2^{-\frac{t}{t_{1/2}}}$$

Hasonló példák

Tartályból kiömlő víz (közelítőleg):

$h(t) = h_0\ e^{-a\,t}$

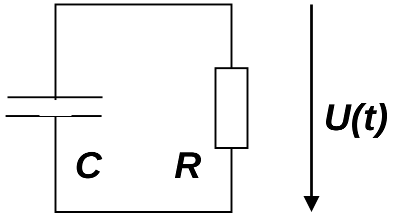
$X = t, \quad Y = h$



Ellenálláson át kisülő kondenzátor:

$U(t) = U_0\ e^{-t\,/\,RC}$

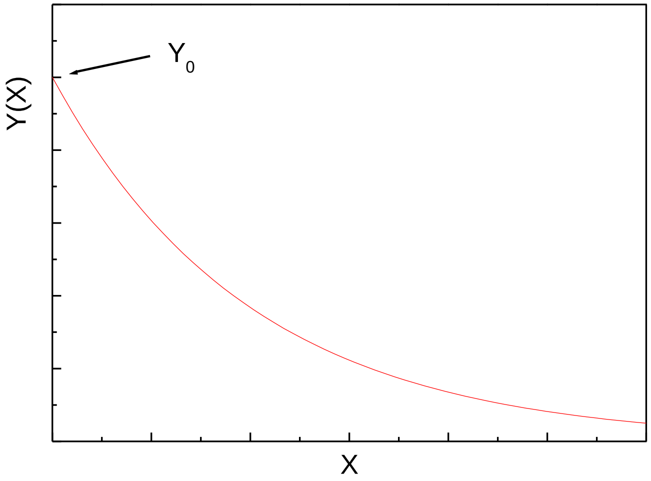
$X = t, \quad Y = U$



A légköri nyomás függése a tengerszint (***h***=0 km) feletti magasságtól:

$p(h) = p_0\ e^{-0.125\,h}$

ahol: $p_0 = 10^5$ **Pa,** **[*h*] = km,** $X = h, \quad Y = p$



Elrettentésül – egy diplomamunka részlete (ELTE, 1999):

$$P(x_c > x) = p(x) = e^{-Qx} = e^{-x/\lambda}. \tag{5}$$

Annak a valószínűsége, hogy a részecske az x pont dx környezetében ütközik először:

$$dq(x) = -\frac{dp(x)}{dx} \cdot dx = p(x) \cdot Q \cdot dx = Qe^{-Qx}dx. \tag{6}$$

Az így definiált $dq(x)$ az x valószínűségi változó valószínűség-sűrűség függvénye. A következő ütközés x_c helye az eloszlásfüggvényből határozható meg:

$$\int_0^{x_c} dq = 1 - p(x_c) = 1 - e^{-Qx_c} = R_{0-1}, \tag{7}$$

ahol R_{0-1} a $[0,1)$ intervallumból vett egyenletes eloszlású véletlenszám. A 7. egyenletből az ütközés helyét kifejezve:

$$x_c = -\frac{1}{Q} ln(1 - R_{0-1}) = -\lambda ln(1 - R_{0-1}). \tag{8}$$

Belátható, hogy az így meghatározott ütközési pozíció sok részecskére vett átlagértéke megegyezik az átlagos szabad úthosszal.

Elektromos tér jelenlétében (általános esetben) a részecske görbe vonalú pályán mozog, a szabad úthossz, illetve a következő ütközés helye az s görbevonalú koordináta mentén számítandó ki. Az ütközés pozíciójának meghatározásánál figyelembe kell venni a tér gyorsító hatását, aminek következtében (a részecske kinetikus energiájának változása miatt) a hatáskeresztmetszet változik a részecske mozgása során: $Q = Q(\epsilon(s))$.

Induljon a részecske az $s_0 = 0$ koordinátájú pontból Annak valószínűsége, hogy az ütközés $s_c > s$ helyen történik:

$$P(s_c > s) = p(s) = e^{-\int_0^s Q(\epsilon(s))ds}. \tag{9}$$

Az s koordinátájú hely ds környezetében történő ütközés valószínűsége:

$$dq(s) = -\frac{dp(s)}{ds} \cdot ds = p(s)\, Q\,(\epsilon(s))\, ds = Q\,(\epsilon(s))\; e^{-\int_0^s Q(\epsilon(z))dz}\, ds. \tag{10}$$

Fizika a matematikában - matematika a fizikában

Mai kérdésünk:

Mitől természetes a természetes alapú logaritmus?

Mi ez a szám $e = 2.71828....$? Miért pont ennyi?

$$ln\ x = log_e\ x$$

ln – természetes alapú logaritmus – miért természetes? *

Kezdjük valahol az elején!

1 tétel:

Bármilyen lépést teszünk gyakorlati problémáink megoldására, ennek rettenetes következményei (is) lehetnek.

avagy:

Hogyan juttathat el a lustaság a számolás megszületésétől a valós számkörig és tovább?

---

* Megj: ***ln*** kiejtése: ellen. Pl: ellentengernagy = a tengernagy természetes alapú logaritmusa

1. tétel: alkotó lustaság

N: **1,2,3,4….** Végre!

Vannak természetes számok. De jó! Meg tudjuk számolni a tevéket, az adóba begyűjtött búzászsákokat.....

Lustaság: Adót sokan fizetnek. Ha valaki hoz még három zsákot, minek mindent újraszámolni?

Legyen hát összeadás! $c = a + b$

Kíváncsiság: És mi van, ha én ***b***-t és ***c***-t ismerem? Meg tudom mondani mennyi ***a*** ?

Gyakorlati igény: A kincstár fizet a kovácsnak tíz zsák búzát. Hány zsák maradt ?

Legyen akkor kivonás is! $b = c – a$

Baj van: A kincstárban öt zsák búza van. Tízet kap(na) a kovács. A maradó zsákok száma valami ismeretlen, nem természetes szám. Most mi legyen?

Z: **….-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,…**

…amely tovább alkot…

- **Lustaság**: Ne adogassunk össze ismétlődő számokat (a fejadó mindenkire egyforma).
- **Legyen hát szorzás!** $c = a\,b$
- **Kíváncsiság**: És ha én ***b***-t és ***c***-t ismerem?
- **Gy**: El kellene osztanom a zsákmányt öt egyenlő részre.
- **Legyen osztás!** $b = c : a$
- **B**: Baj van! Három mérő búzát kell öt felé osztanom. Hány mérő búza jut egynek?
- **Q: ….., - 3/2,…..,-1,…-999/1000,….-2/3,….,0,…..,2/5,……,1,…….,18/3,…**
- **Éljen! A számegyenes bármely pontja tetszőlegesen megközelíthető! Jöhetnek a grafikusan ábrázolható függvények.**
- **Most már egy összefüggés bármely tagja lehet független változó is! (?)**

….míg el nem szabadul a pokol….

- **Lustaság**: Ne szorozgassunk össze ismétlődő számokat. Ez csak egy egyszerű jelölés kérdése: $a\,a\,a\,a = a^4$. Vagy nem?
- **Gyakorlati igény:** Hogyan nevezzünk meg és írjuk fel nagy számokat?

Lehetőségek: 1) ujj, kéz, kupac, tucat, …. 2) MLCCXXXIV <-> 1734

3) Franciául: 98 quatre-vingt-dix-huit (katre-ven-diz-vit) $4 \times 20 + 10 + 8$

4) Végül: 1743 = 3x100 + 4x101 + 7x102 + 1x103

Legyen hát hatványozás! $c = a^b$

- ***Kíváncsiság:*** ***a=?*** *gyökvonás* ***pl. c=4, b=2***
- ***b=?*** *logaritmus* ***pl. c=100, a=10***

gyökvonás - > tört kitevő - > $y=x^b$ - hatvány fv,

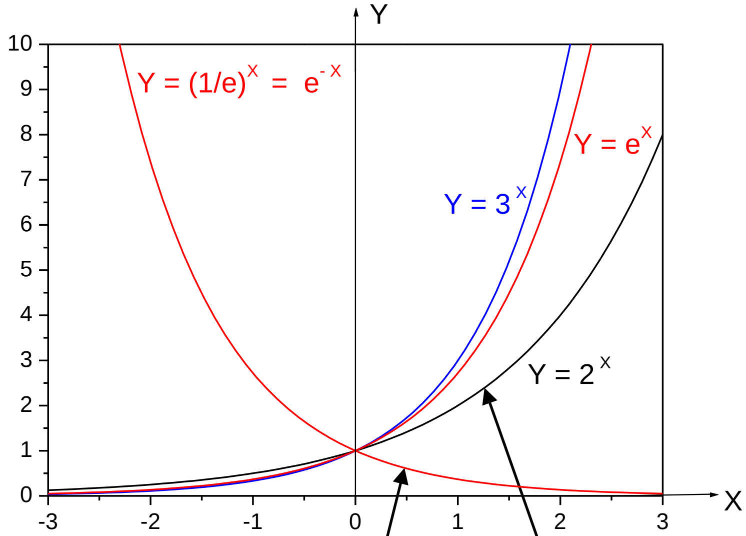
logaritmus - > $y=\log_a x$ logaritmus fv

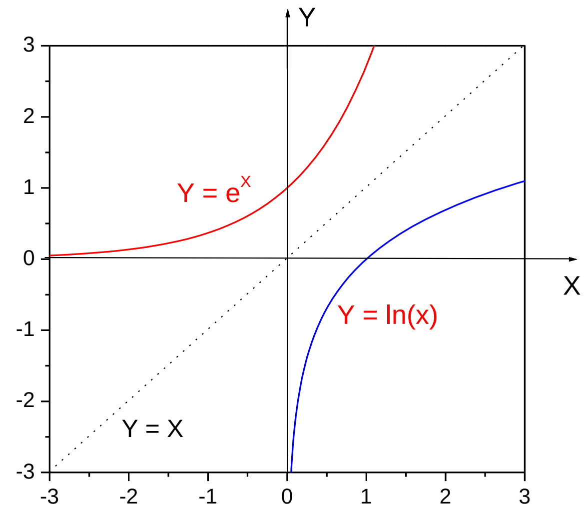
-> $y=a^x$ exponenciális fv

„Baj van:" -> valós számkör: R (sőt a komplex számkör is: C)

A matematikalag pontosabb megfogalmazásokat én innen kiindulva általánosítanám

Az exponenciális függvény és a logaritmusfüggvény





Hasonlít a rádioaktív bomlás görbéjéhez

Hasonlít a kamatos kamat görbéjéhez

Kísérleti megközelítés

Még mindig nem tudjuk, hogy mi az az **e**. És hogy miért kell nekünk?

(Egyáltalán: kell ez nekünk?)

Járjunk a végére ennek a kamatos kamatnak: $a_{n+1}=a_1\, q^n$!

1 Ft, 1 évre, évi 100%-os kamatra:

$a_1 = 1$, $q = 1+1 = 2$, $n = 1$ $\qquad a_2 = a_1\, q \;=\; 1\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$ Ft-ot fizetek vissza

1 Ft, 12 hónapra, havi 100/12 %-os kamatos kamatra:

$a_1 = 1$, $q = 1+1/12$, $n = 12$ $\qquad a_{13} = a_1\, q^{12} \;=\; 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613$ Ft-ot fizetek vissza

1 Ft, 365 napra, napi 100/365 %-os kamatos kamatra:

$a_1 = 1$, $q = 1+1/365$, $n = 365$ $\qquad a_{366} = a_1\, q^{365} \;=\; 1\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.7146$ Ft-ot fizetek vissza

Térjünk át mondjuk a tizedmásodperces kamatozásra:

Ezt már jó közelítéssel így is írhatjuk: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.71828\ldots$ Ft-ot fizetek vissza

Ezzel megérkeztünk **e**-hez ! Könnyen belátható még, hogy ha 2 évig kell a kamatot fizetni, akkor a

végén fizetendő összeg: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.71828^2 = e^2$

Ha pedig x évig kell, akkor: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.71828^x = e^x$ **! ITT AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY !**

Egy beszúrás: itt e^x azonnali felírása is lehetséges

1) $$e^x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn} = \left(1+\frac{x}{xn}\right)^{xn} = \left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}$$

2)
Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \ldots\ldots & & & &
\end{array}$$

3) $$1 + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}\,\frac{x}{n} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\,\frac{x^2}{n^2} + \ \ldots$$

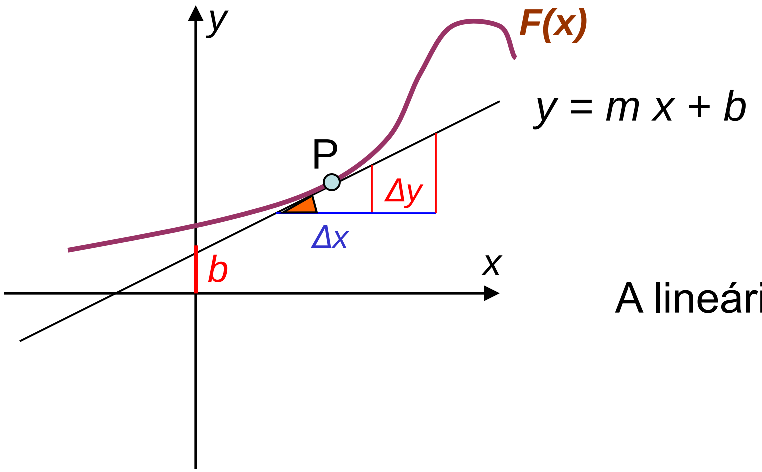
4)

$n \to \infty$

Ez eddig szép, de kicsit nehézkes.

Általánosabb megoldást keresünk.

Olyan függvényeket keresünk, amelyek **meredeksége** a **függvényértékkel** arányos.



A lineáris függvény **nem** ilyen: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = const.$

Ha egy ***f(x)*** függvénynek a **P** pontban van érintő egyenese, nevezzük annak meredekségét **differenciálhányadosnak:**

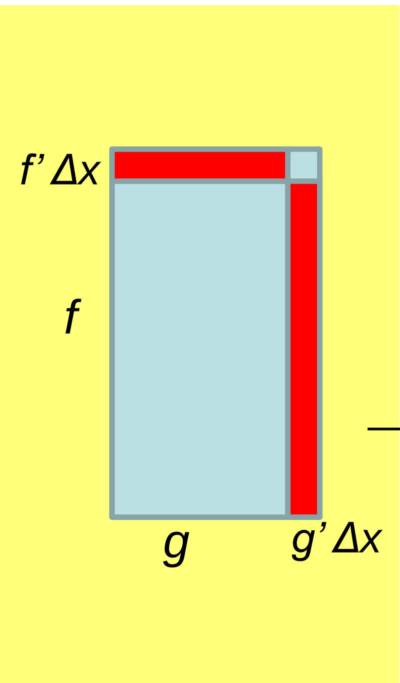
Jelölései

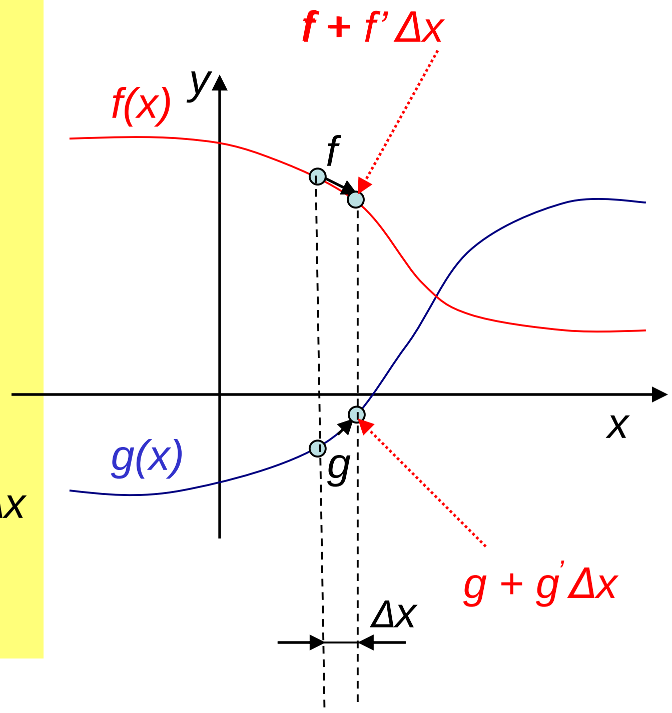
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{dy}{dx} = y'$$

Az *y'(x)* függvényt pedig nevezzük az *y(x)* függvény deriváltfüggvényének! (*származtatott fv.)*

Sajnos még csak egyetlen függvény differenciálhányadosát ismerjük.

De csak egy lépés, és végtelenül sok függvényét ismerni fogjuk.
Vegyünk két tetszőleges függvényt:





A két függvény szorzata: *f g*

Mennyi ennek a differenciálhányadosa: *(f g)'* ?

$$(fg)' \approx \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{(f+f'\Delta x)(g+g'\Delta x)-fg}{\Delta x} =$$

$$= \frac{fg + f'\,g\,\Delta x + f\,g'\Delta x + f'g'\Delta x^2 - fg}{\Delta x} =$$

$$= f'\,g + f\,g' + f'g'\Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'\,g + f\,g'$$

Terület
Geometriai
közelítés

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

Algebrai
közelítés

Ki melyiket
szereti

Ezt a szabályt már csak alkalmaznunk kell.

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

Még be kell látnunk, hogy:

$c' = 0$ *Konstans differenciálhányadosa nulla (vízszintes iránytangense)*

$(c\,f)' = 0\,f + c\,f' = c\,f'$, *Konstanssal szorzott függvény differenciálhányadosa a függvény differenciálhányadosának konstans-szorosa*

és

$(f+g)' = f' + g'$ *A differenciálás additív* $(f+g)' = \dfrac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} = f' + g'$

Ezek után:

$$x' = 1 \quad (a\ \ 45\ \ fokos\ \ egyenes\ \ iránytangense)$$

$$(x^2)' = x'\,x + x\,x' = 1x + x\,1 = 2x$$

$$(x^3)' = x'\,x^2 + x\,(x^2)' = 1x^2 + x\,2x = 3x^2$$

$$(x^4)' = x'\,x^3 + x\,(x^3)' = 1x^3 + x\,3x^2 = 4x^3$$

általánosan:

$$(x^n)' = x'\,x^{n-1} + x\,(x^{n-1})' = 1x^{n-1} + x\,(n-1)\,x^{n-2} = n\,x^{n-1}$$

és máris egy egész **függvénycsalád** – ***végtelenül sok*** *függvény* – differenciálhányadosát ismerjük

Írjuk fel hát életünk első (talán nem utolsó) differenciálegyenletét!

Az *y* mennyiség változásának sebessége legyen egyenlő az *y* mennyiség nagyságával:

$$y' = y$$

Keressük ***y*****-t**, mint ismert viselkedésű függvények súlyozott összegét:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \ldots$$

Ennek a végtelen összegnek a differenciálhányadosát már ismerjük:

$$y' = 0 + c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + c_4 4x^3 + c_5 5x^4 + \ldots$$

A jobb oldalak egyenlők, ha ***x*** minden hatványának együtthatói egyenlők:

$$c_0 = c_1, \qquad c_1 = 2c_2, \qquad c_2 = 3c_3, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Vegyük észre, hogy c_0 értékét szabadon választhatjuk ! Ám ha megadjuk *y* értékét az *x*=0 pontban, akkor ez a szabadság megszűnik.

A differenciálegyenleteknek általában végtelen sok, de HASONLÓ megoldása van. Az úgynevezett kezdeti feltételek megadásával választunk ki ezekből egyet.

Legyen most $c_0 = 1$!

Ezzel:

$$y = 1 + x + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots. =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots.$$

Megvan tehát a megoldás:

$$y(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \ldots.$$

Némi számolással kiderül, hogy:

$$y(1) = 2.71828\ldots = e,$$

! ! !

$$y(\tfrac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}},$$

$$y(2) = e^2,$$

$$bizonyítható,\ hogy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ y(x) = e^x$$

Ld. Pascal dia

Tehát az $y' = y$ differenciálegyenlet általános megoldása : $y(x) = c\,e^x$

Az arányosság azonban általánosabb az egyenlőségnél.

Legyen az *y* változásának sebessége ***arányos*** az *y* mennyiség nagyságával:

Az $y' = \lambda y$ differenciálegyenlet megoldása: $y(x) = c\,e^{\lambda x}$

$$c = 1\ \ és\ \ \lambda = -1\ \ esetén\ \ pl.: \quad y(x) = 1 - x + \tfrac{1}{2!}x^2 - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \ldots = e^{-x}$$

.

Az arányosság esete – ugyanúgy levezethető:

$$y' = \lambda y$$

$$\lambda y = \lambda c_0 + \lambda c_1 x + \lambda c_2 x^2 + \lambda c_3 x^3 + \lambda c_4 x^4 + \lambda c_5 x^5 + \ldots$$

$$y' = 0 + c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + c_4 4x^3 + c_5 5x^4 + \ldots$$

$$\lambda c_0 = c_1 , \qquad \lambda c_1 = 2c_2 , \qquad \lambda c_2 = 3c_3 , \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$c_1 = c_0 \lambda , \qquad c_2 = \frac{c_0}{2} \lambda^2 , \qquad c_3 = \frac{c_0}{2 \cdot 3} \lambda^3 , \ldots\ldots\ldots$$

$$x \to \lambda x$$

Igy érthető, hogy:

$c = 1$ *és* $\lambda = -1$ *esetén:* $\quad y(x) = 1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 - \ldots = e^{-x}$

Mitől természetes *e*?

Vegyük észre, hogy ha $\lambda \neq 1$,

akkor differenciálegyenleteink megoldásaként más, tetszőleges ***a*** alapú exponenciális függvényeket kaphatunk :

$$e^{\lambda x} = (e^{\lambda})^x = a^x$$

A vizsgált jelenségek szempontjából tehát ***e***-nek **nincs** kitüntetett szerepe.

Minden *a*-tól különbözik viszont abban, hogy az $y' = y$ differenciálegyenlet megoldásaként adódó e^x függvény **önmaga differenciálhányadosa**.*

***Amiről ma szó volt*:**

Hogyan lehet egy mennyiség, és annak változási sebessége között felismert, fizikailag értelmes kapcsolatot un. differenciálegyenlet formájában megfogalmazni?

Hogyan lehet ezt elemi módszerekkel megoldani? (Ez volt a történeti út is!)

Mi a legegyszerűbb példák egyikét néztük meg, de a kapott eredmény sok folyamatra használható, és talán megmutatta a módszer alapelveit.

Végül….

Még egy megjegyzés:

Newton 2. törvénye egy un. másodrendű differenciálegyenlet. Pl: $F = m\,y''$
ahol y'' az y helykoordináta idő szerinti második deriváltja

Állandó erő esetén itt az

$y'' = F/m$ = constans differenciálegyenletet kell megoldani.

Mivel azonban tudjuk, hogy $v_y = y'$ azaz $y'' = (y')' = v_y'$,

először a $v_y' =$ constans egyenletet kell megoldani.

Ez már akár házi feladat is lehetne, ha nem lennénk rendhagyók.

Ehelyett….

Egydimenziós mozgás (x tengely mentén), állandó erő esetén

t=0 : helyzet: $x(0)$ sebesség: $v(0)$

$$F = ma \qquad a = \frac{dv(t)}{dt} \qquad v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

A gyorsulás állandó, értéke: a

$$Konvenció: \frac{dx(t)}{dt} = x'(t), \qquad \frac{dx'(t)}{dt} = x''(t)$$

$$v(t) = x'(t), \qquad a = x''(t)$$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cancel{c_3 t^3} + \ldots$$

$$x'(t) = 0 + c_1 + c_2\, 2t + \cancel{c_3\, 3t^2} + \ldots$$

$$x''(t) = 0 + 0 + c_2\, 2 + 0 + 0 + \ldots$$

$$x(t) = x(0) + v(0)\,t + \frac{a}{2} t^2$$

$$v(t) = v(0) + a\,t \;; \qquad v(0) = c_1$$

$$-> \qquad a = 2c_2$$

Mi történt ezen a „fizikaórán”?

- Jelenségkör
- Közös elem megragadása
- Elemi szintű kezelés
- „Kísérletezés”
- Kitekintés – (ez a matematikai vonatkozás)

- Többnyire faktos osztályok jöttek (20).
- 4-5 gyerek felvillanyozódott.
- Másik 4-5 mintha megnyugodott volna.
- A többit nem tudom.

Fogalmam sincs, hogy mindez milyen szinten, mennyire járható út.
Gyanítom, hogy egy adott gondolkodási típusnak a hétköznapokban is jó lehet.